Aufgabenblatt Abiturvorbereitung I

1.		Gegeben ist die Funktion f(x) mit $f(x) = (2x+2) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
	a)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
	b)	Untersuchen Sie die Funktion auf Extremwerte und Wendepunkte.
	c)	Zeichnen Sie den Graphen im Intervall [-8 ; 1] 1LE = 1cm. Legen sie dazu eine Wertetabelle an (Abstand der Punkte 1 cm).
	d)	Berechnen Sie die Fläche zwischen den Koordinatenachsen und kennzeichnen Sie die Fläche.
	e)	Bestimmen Sie die Randwerte des Definitionsbereichs.

2.		Gegeben ist die Funktion f(x) mit $f(x) = 6x \cdot e^{-x}$
	a)	Berechnen Sie den Schnittpunkt mit der y- Achse
	b)	Gibt es einen Schnittpunkt mit der x- Achse? Begründen Sie ihre Antwort.
	c)	Untersuchen Sie die Funktion auf Extremwerte und Wendepunkte.
	d)	Zeichnen Sie den Graphen im Intervall [0 ; 6] 1LE = 1cm. Legen sie dazu eine Wertetabelle an (Abstand der Punkte 1 cm).
	e)	Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse im Intervall [0 ; 5] und kennzeichnen Sie die Fläche.
	f)	Bestimmen Sie die Randwerte des Definitionsbereichs.

3.		Der Zerfall radioaktiver Substanzen erfolgt nach dem Gesetz: $m(t) = a \cdot e^{-k \cdot t}$ für $k > 0$ $\quad t =$ Zeit in Tagen, $m(t) =$ vorhandene Jodmenge in mg. Bei einem wissenschaftlichen Experiment sind zu Beginn der Beobachtung in einem Versuchsbehälter 30 mg radioaktives Jod 131 vorhanden. Nach 5 Tagen sind nur noch 22 mg übrig.
	a)	Bestimmen Sie die Parameter a und k für das Zerfallsgesetz.
	b)	Wie viel Jod 131 ist nach 1 Woche noch vorhanden?
	c)	Die Zeit, in der die Hälfte einer radioaktiven Substanz zerfällt, heißt Halbwertszeit. Berechnen Sie die Halbwertszeit t_h für Jod 131.
	d)	Nach wie viel Tagen sind 80% der Ausgangsmenge zerfallen?
	e)	Zeichnen Sie den Graphen der Zerfallsfunktion in ein geeignetes Koordinatensystem

4.		In einem Laborversuch soll die Entwicklung einer Bakterienkultur mit folgender Exponentialfunktion modelliert werden: $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ $\quad x =$ Zeit in Stunden, $f(x) =$ Anzahl der Bakterien
	a)	Bestimmen Sie geeignete Werte für n_0, a und k, wenn die Anzahl der Bakterien bei Versuchsbeginn 4 Millionen beträgt und nach x = 8 Stunden auf maximal 12 Millionen angewachsen ist. Stellen Sie die Funktionsgleichung auf.
	b)	Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem. (I = [0 ; 50]).
	c)	Beschreiben Sie den Entwicklungsverlauf der Bakterienkultur.
	d)	Berechnen Sie den Wendepunkt. Interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf den Laborversuch.
	e)	Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse im Intervall [0 , 8]. Welche Bedeutung könnte die Fläche (Anzahl der Bakterien mal Zeit) in Zusammenhang mit dem Laborversuch haben?
	f)	Bestimmen Sie die Asymptote für f(x). Von welcher Bedeutung ist diese für den Laborversuch?

5.	Durch $f(t)=20\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$ mit $t=$ Zeit in Stunden nach der Einnahme und $f(t)=\frac{mg}{Liter}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Die folgenden Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.	
	a)	Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert? Wie groß ist dieser höchste Wert?
	b)	Berechnen Sie den Wendepunkt und machen Sie eine Aussage über dessen Bedeutung im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung.
	c)	Stellen Sie für die ersten 12 Stunden eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
	d)	Wie hoch ist die mittlere Konzentration des Medikaments innerhalb der ersten 12 Stunden?

6.	Bei einer Vireninfektion ergibt sich die Anzahl der Vieren (in Milliarden) nach folgender Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ Nach drei Tagen wird ein Medikament verabreicht, das der Ausbreitung der Vieren nach folgender Funktion entgegenwirkt: $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x-9$	
	a)	Skizzieren Sie den groben Verlauf des Funktionsgraphen. Verwenden Sie dabei die Kenntnisse, die Sie über quadratische Funktionen besitzen.
	b)	Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen (x = a) alle Vieren abgestorben sind (Ergebnis auf drei Kommastellen runden).
	c)	Zeichnen Sie den graphischen Verlauf der Vireninfektion im Intervall [0 ; a]
	d)	Zu welchem Zeitpunkt ist die Anzahl der Vieren am größten? Wie hoch ist die Anzahl?
	e)	Die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse ist ein Maß für die schädigende Wirkung der Vieren, auch Wirkungsfaktor genannt. Gesundheitliche Schäden können auftreten, wenn der Wert 60 WE (Wirkungseinheiten) überschreitet. Berechnen Sie den gesamten Wirkungsfaktor bis zum völligen Abklingen der Krankheit.

7.	Bei einer Virusinfektion erfolgt die Virenvermehrung nach der Funktion $f(x)=e^x-1$ Wobei x die Anzahl der Tage ist. Nach t Tagen wird ein Medikament verabreicht, dass die Virenkonzentration nach der Funktion $g(x)=f(t)\cdot e^{-(x-t)}$ verringert.	
	a)	Stellen Sie diesen Sachverhalt für t = 4 Tage grafisch dar.
	b)	Die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse ist ein Maß für die schädigende Wirkung der Vieren, auch Wirkungsfaktor genannt. Gesundheitliche Schäden können auftreten, wenn der Wert 200 WE (Wirkungseinheiten) überschreitet. Berechnen Sie den gesamten Wirkungsfaktor bis zum völligen Absterben aller Vieren.
	c)	Welche Folgen hat es, wenn das Medikament erst nach t = 5 Tagen verabreicht wird?

8.	Gegeben ist folgende Funktion: $f(x) = \begin{cases} -0{,}199x^3 + 1{,}482x^2 & \text{für } 0 \le x \le 6 \text{ genannt } g(x) \\ e^{-\frac{1}{2}(x-10)} + 3 & \text{für } 6 \le x \quad \text{genannt } h(x) \end{cases}$ Es handelt sich um eine aus zwei Funktionen zusammengesetzte Funktion. Beachten Sie bitte den jeweiligen Definitionsbereich. Bei folgenden Berechnungen genügt eine Genauigkeit von 3 Kommastellen.	
	a)	Für welchen x- Wert hat die Funktion f (x) den größten Wert? Berechnen Sie diesen Wert. Wie nennt man diesen Punkt?
	b)	Berechnen Sie den Punkt in dem die Änderungsrate der Funktionswerte von f(x) am größten ist. Wie nennt man diesen Punkt?
	c)	Stellen Sie für [0 ; 12] eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
	d)	Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen und versuchen Sie einen Bezug zur Biologie herzustellen. (Stichworte: Bakterienentwicklung, Medikamentenkonzentration im Blut, Wirkung eines Dopingmittels, Zufuhr eines Mittels in mg/h usw.)
	e)	Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse im Intervall [0 ; 10]. Kennzeichnen Sie diese Fläche im Koordinatensystem. Versuchen Sie die Fläche aus Sicht zu einen biologischem Vorgang zu deuten.
	f)	Berechnen Sie den Mittelwert im Intervall [0 ; 20]. Kennzeichnen Sie den Mittelwert im Koordinatensystem. Versuchen Sie eine biologische Deutung für diesen Wert zu finden.

9.	Die jährliche Fördermenge (Förderquote) einer Erzmine wird durch folgende Funktionsgleichung beschrieben: $M(t) = (a - b \cdot t) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot t}$ Die Variable t steht für Zeit in Jahren und M(t) für die Förderquote in 1000 Tonnen pro Jahr. Im Jahr 1900 wurde mit einer Förderquote von 6000 Tonnen begonnen. Im Jahr 1971 erreichte die Förderquote ihr Maximum.	
	a)	Bestimmen Sie die Parameter a und b der Funktionsgleichung, wie lautet diese?
	b)	In welchem Jahr wurde die Förderung eingestellt?
	c)	Welche maximale Förderquote wurde 1971 erreicht?
	d)	In welchem Jahr war der Förderquotenzuwachs am größten?
	e)	Zeichnen Sie den Graphen von M(t) in ein geeignetes Koordinatensystem und beschreiben Sie die Entwicklung der Förderquote über den gesamten Abbauzeitraum.
	f)	Wie viel Erz wurde über den gesamten Abbauzeitraum gefördert?
	g)	Wie hoch war die durchschnittliche Förderquote im Zeitraum von 1960 bis 1980?

10.	In einer bestimmten Stadt an einer bestimmten Stelle führt die Polizei in regelmäßigen Abständen in der Nacht von Sonnabend auf Sonntag zwischen 1 Uhr und 4 Uhr Verkehrskontrollen durch. Dabei muss der Fahrer „in die Röhre pusten“, um festzustellen, ob der Alkoholgehalt im Blut im gesetzlich erlaubten Rahmen liegt oder nicht. Aus mehrjähriger Erfahrung weiß die Polizei, dass ungefähr 12% aller männlichen und 7% aller weiblichen Fahrer um diese Zeit an dieser Stelle die „Promillegrenze“ überschreiten. Wir nennen diese Personen hier kurz „Alkoholsünder“. Am letzten Wochenende wurden 100 Verkehrsteilnehmer überprüft. Darunter befanden sich 40 Frauen.	
	a)	Gehen Sie davon aus, dass die Erfahrungswerte der Polizei stimmen. Stellen Sie diesen Sachverhalt in Form einer Vierfeldtafel dar. Berechnen Sie für die zufällige Auswahl einer überprüften Person (die Polizei protokolliert jede Überprüfung) die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: A: Die überprüfte Person ist weiblich und Alkoholsünderin. B: Die überprüfte Person ist nüchtern. C: Falls die ausgewählte Person männlich ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt Trunkenheit am Steuer vor? D: Falls ein Alkoholsünder ausgewählt wurde, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person weiblich? Formulieren Sie zu jedem Ergebnis einen aussagekräftigen Antwortsatz. **M:** männlich, **W:** weiblich, **A:** Alkoholsünder **N:** kein Alkoholsünder (nüchtern)
	Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass 10% aller Verkehrsteilnehmer, die an der entsprechenden Stelle kontrolliert werden Alkoholsünder sind. Weiterhin wird angenommen, dass die Anzahl der Alkoholsünder in den Kontrollen einer Binomialverteilung genügt. Eine Tabelle der Binomialverteilung für n = 100 und p = 0,1 ist beigefügt.	
	b)	Überprüfen Sie, ob für die Verteilungsfunktion der Laplacebedingung genügt.
	c)	Mit wie vielen Fahrverboten kann die Polizei bei der Überprüfung von 100 Verkehrsteilnehmern rechnen?
	d)	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Erwartungswert.
	e)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Alkoholsünder zwischen 6 und 14?
	f)	Die Annahme p = 0,1 für Alkoholsünder soll auf einem Signifikanzniveau von höchstens 5% getestet werden. Bestimmen Sie den Annahme und den Ablehnungsbereich. Überprüfen Sie die für den gewählten Ablehnungsbereich den Fehler 1. Art und kommentieren Sie das Ergebnis.
	g)	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aus d), e) und f) mit der Tabelle der Normalverteilung und bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der Werte bezogen auf die der Binomialverteilung.

Kumulierte Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0{,}1$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
0	0,000	4	0,024	8	0,321	12	0,802	16	0,979	20	0,999
1	0,000	5	0,058	9	0,451	13	0,876	17	0,990	21	1,000
2	0,002	6	0,117	10	0,583	14	0,927	18	0,995	22	1,000
3	0,008	7	0,206	11	0,703	15	0,960	19	0,998	23	1,000

11. Die Befragung an einem Berufskolleg ergab, dass 75% aller weiblichen Schüler (W) und 65% aller männlichen Schüler (M) gerne Sport (S) treiben.
54% aller Schüler sind weiblich.

a) Stellen Sie diesen Sachverhalt in einer Vierfeldtafel dar.

b) Wie viel Prozent aller Schüler treiben gerne Sport?

c) Zeichnen Sie das Baumdiagramm und den inversen Baum.
Berechnen Sie alle Pfadwahrscheinlichkeiten.

d) Berechnen Sie für die zufällige Auswahl eines Schülers die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
- A: Der zufällig ausgewählte Schüler ist männlich und treibt gerne Sport.
- B: Der zufällig ausgewählte Schüler treibt gerne Sport.
- C. Der zufällig ausgewählte Schüler ist männlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser ungern Sport treibt?
- D: Der zufällig ausgewählte Schüler treibt gerne Sport. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er weiblich?

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass 70% aller Schüler, gerne Sport treiben
Weiterhin wird angenommen, dass die Anzahl der Schüler, die gerne Sport treiben einer Binomialverteilung genügt.
Eine Tabelle der Binomialverteilung für n = 100 und p = 0,7 ist beigefügt.

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man in einer Zufallsstichprobe unter 100 ausgewählten Schülern:
- (1) genau 70 Sportbegeisterte
- (2) weniger als 75 Sportbegeisterte
- (3) mindestens 60 höchstens 71 Sportbegeisterte
- (4) mehr als 75 Sportbegeisterte

f) Die Annahme p = 0,7 soll auf einem Signifikanzniveau von höchstens 10% getestet werden. Bestimmen Sie den Annahme und den Ablehnungsbereich. Überprüfen Sie die für den gewählten Ablehnungsbereich den Fehler 1. Art und kommentieren Sie das Ergebnis.

g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aus d) und e) mit der Tabelle der Normalverteilung und bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der Werte bezogen auf die der Binomialverteilung.

Kumulierte Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0,7$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
50	0,000	56	0,002	62	0,053	68	0,367	74	0,837	80	0,991
51	0,000	57	0,004	63	0,080	69	0,451	75	0,886	81	0,995
52	0,000	58	0,007	64	0,116	70	0,538	76	0,924	82	0,998
53	0,000	59	0,012	65	0,163	71	0,623	77	0,952	83	0,999
54	0,001	60	0,021	66	0,221	72	0,704	78	0,971	84	1,000
55	0,001	61	0,034	67	0,289	73	0,776	79	0,984	85	1,000