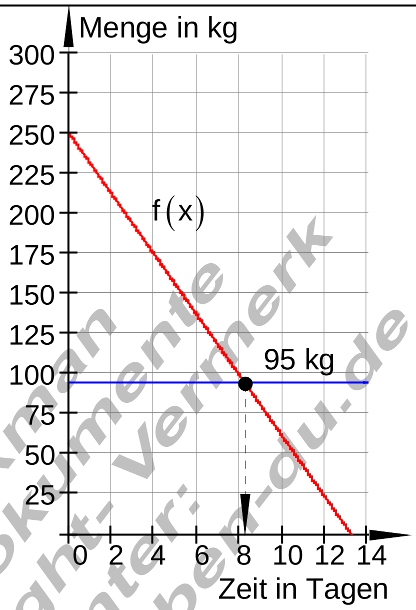
Lösungen lineare Funktionen Teil XVIII

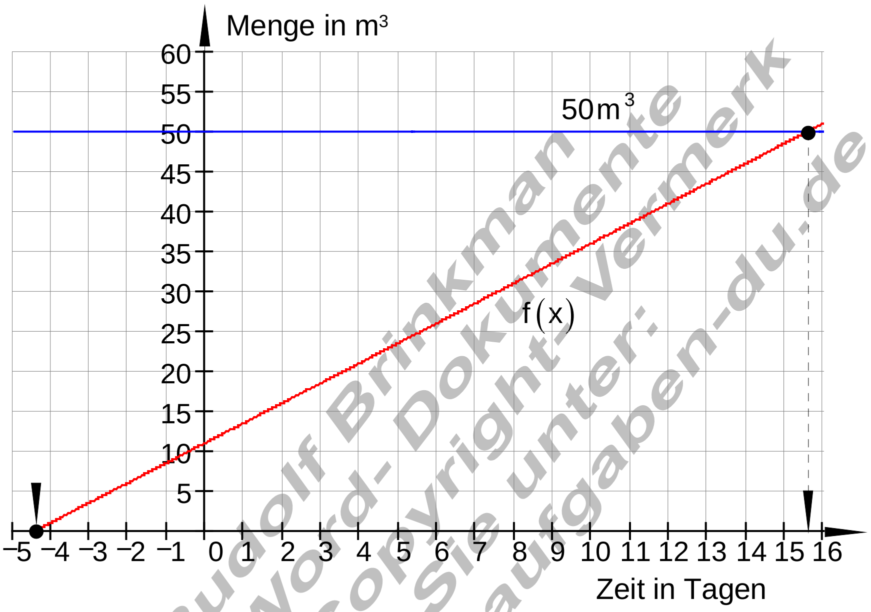
Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösungen		
	a)	Die unabhängige Variable x steht für die Zeit in Tagen. Die abhängige Variable f(x) steht für die verbleibende Menge Fett in kg. Der Anfangswert beträgt 250 kg. Die Änderungsrate ist negativ und beträgt 19kg/Tag. Da ein linearer Zusammenhang besteht gilt: $f(x) = a_1x + a_0$ mit $a_1 = -19$ und $a_0 = 250$ wird $\underline{\underline{f(x) = -19x + 250}}$	
	b)	Da bei 95 kg nachbestellt werden soll, gilt der Ansatz: $f(x) = 95 \Leftrightarrow -19x + 250 = 95 \mid \cdot(-1)$ $\Leftrightarrow 19x - 250 = -95 \mid +250$ $\Leftrightarrow 19x = 155 \mid :19$ $\Leftrightarrow x = \frac{155}{19} \approx 8{,}156$ Die Bestellung muss in etwa 8 Tagen erfolgen.	
	c)	Zu bestimmen ist der Schnittpunkt des Graphen mit der y- Achse: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow -19x + 250 = 0 \mid \cdot(-1)$ $\Leftrightarrow 19x - 250 = 0 \mid +250$ $\Leftrightarrow 19x = 250 \mid :19$ $\Leftrightarrow x = \frac{250}{19} \approx 13{,}158$ Das Fett reicht noch etwa 13 Tage.	

A2 Ausführliche Lösungen

a) Die unabhängige Variable x steht für die Zeit in Tagen.
Die abhängige Variable f(x) steht für die Menge Mist in m^3.
Der Anfangswert beträgt $11m^3$.
Die Änderungsrate ist positiv und beträgt $2{,}5m^3$/Tag.

Da ein linearer Zusammenhang besteht gilt:
$f(x) = a_1x + a_0$ mit $a_1 = 2{,}5$ und $a_0 = 11$ wird $\underline{\underline{f(x) = 2{,}5x + 11}}$



b) Zu bestimmen ist die Zeit, nach der das Mistaufkommen auf $50m^3$ angewachsen ist.

$$f(x) = 50 \Leftrightarrow 2{,}5x + 11 = 50 \mid -11$$
$$\Leftrightarrow 2{,}5x = 39 \mid : 2{,}5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{78}{5} = 15{,}6$$

Nach etwa 15 Tagen muss der Mist abgefahren werden.

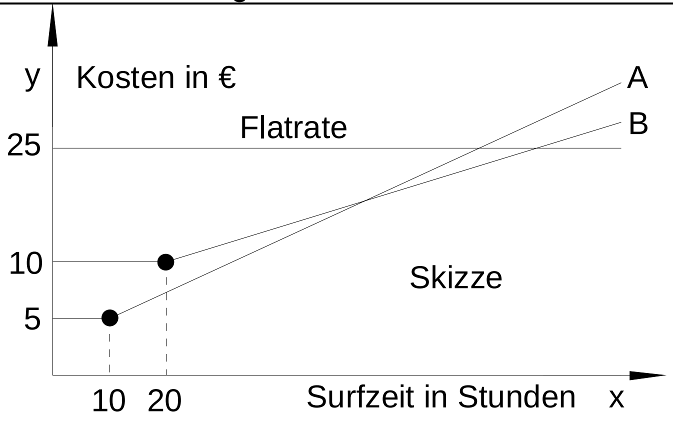
c) Der x- Wert des Schnittpunktes des Graphen mit der x- Achse im negativen Bereich gibt an wann der Mist zuletzt abgefahren wurde.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2{,}5x + 11 = 0 \mid -11$$
$$\Leftrightarrow 2{,}5x = -11 \mid : 2{,}5$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{22}{5} = -4{,}4$$

Vor etwas mehr als 4 Tagen wurde das letzte Mal der Mist abgefahren.

A3 Ausführliche Lösung

a)



x – Achse Zeit in Stunden y – Achse Kosten in €

Tarif A:

0,5 Ct / min sind $60\text{ min}\cdot 0{,}5\text{ Ct/min} = 30\text{ Ct/h} = 0{,}3\text{ €/h}$ (Steigung)

$\Rightarrow K_A(x) = 0{,}3x + a_0$

10 Freistunden bedeuten, in den ersten 10 Stunden
fallen nur die Grundgebühren von 5 € an. $\Rightarrow P(10\,|\,5)$

Durch diesen Punkt verläuft der Graph von $K_A(x)$.

$P(10\,|\,5) \Rightarrow K_A(10) = 5 \Leftrightarrow 0{,}3\cdot 10 + a_0 = 5 \,|\, -3$

$\Leftrightarrow a_0 = 2$

Funktionsgleichung für Tarif A: $K_A(x) = 0{,}3x + 2$

Tarif B:

0,4 Ct / min sind $60\text{ min}\cdot 0{,}4\text{ Ct/min} = 24\text{ Ct/h} = 0{,}24\text{ €/h}$ (Steigung)

$\Rightarrow K_B(x) = 0{,}24x + a_0$

20 Freistunden bedeuten, in den ersten 20 Stunden
fallen nur die Grundgebühren von 10 € an. $\Rightarrow P(20\,|\,10)$

Durch diesen Punkt verläuft der Graph von $K_B(x)$.

$P(20\,|\,10) \Rightarrow K_B(20) = 10 \Leftrightarrow 0{,}24\cdot 20 + a_0 = 10$

$\Leftrightarrow 4{,}8 + a_0 = 10 \,|\, -4{,}8$

$\Leftrightarrow a_0 = 5{,}2$

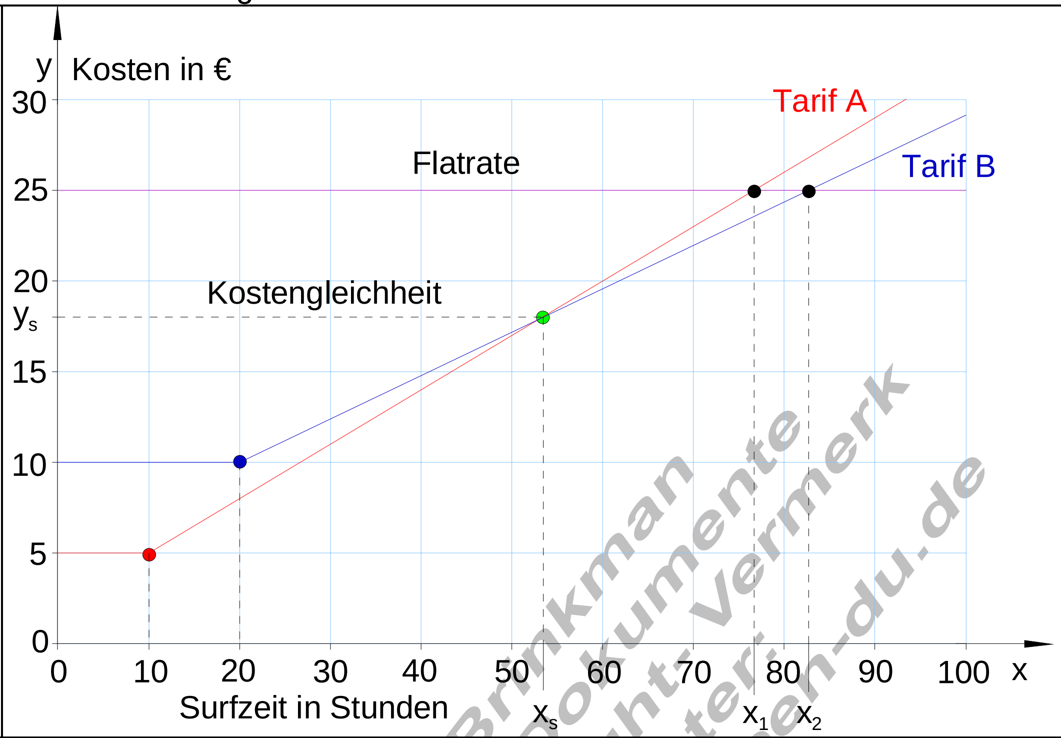
Funktionsgleichung für Tarif B: $K_B(x) = 0{,}24x + 5{,}2$

Tarif C: Flatrate 25 € ist unabhängig von der Surfzeit.

Funktionsgleichung für Tarif C: $F(x) = 25$ (Parallele zur x – Achse)

A3 Ausführliche Lösung

b)



A3 Ausführliche Lösung

c) Bei etwa 53 Stunden schneiden sich beide Geraden, in dem Punkt herrscht Kostengleichheit.
Bis etwa 53 Stunden ist Tarif A der günstigste.
Zwischen etwa 53 und 82 Stunden ist Tarif B der günstigste.
Ab etwa 82 Stunden lohnt sich die Flatrate.

A3 Ausführliche Lösung

d) Armin surft etwa 75 Stunden im Monat. Für ihn wäre bei dieser Surfdauer Tarif B der günstigste.
Eine Rechnung soll das belegen:

Monatliche Surfdauer $2{,}5\,\text{h} \cdot 30 = 75$ Stunden.

Kosten bei Tarif A: $K_A(75) = 0{,}3 \cdot 75 + 2 = 24{,}50$

Kosten bei Tarif B: $K_B(75) = 0{,}24 \cdot 75 + 5{,}2 = 23{,}20$

Kosten bei Tarif C: $F(75) = 25$

A3 Ausführliche Lösung

e) Kostengleichheit für Tarif A und B ist im Schnittpunkt beider Geraden zu finden.

$$K_A(x) = K_B(x) \Leftrightarrow 0{,}3x + 2 = 0{,}24x + 5{,}2 \mid -0{,}24x$$
$$\Leftrightarrow 0{,}06x + 2 = 5{,}2 \mid -2$$
$$\Leftrightarrow 0{,}06x = 3{,}2 \mid : 0{,}06$$
$$\Leftrightarrow x = x_s = \frac{320}{100} : \frac{6}{100} = \frac{320 \cdot 100}{100 \cdot 6} = \frac{320}{6} = \frac{160}{3}$$
$$= 53\frac{1}{3} \ \text{(53 Stunden und 20 Minuten)}$$
$$K_A\left(\frac{160}{3}\right) = \frac{3}{10} \cdot \frac{160}{3} + 2 = 16 + 2 = 18$$

Kostengleichheit herrscht bei einer Surfzeit von 53 h und 20 min.
Die für diese Zeit anfallenden Kosten betragen für beide Tarife 18 €.

A3 Ausführliche Lösung

f) Aus den Graphen ist abzulesen, dass der Schnittpunkt von K_B (x) mit F (x) den Punkt markiert, ab dem für längere Surfzeiten die Flatrate günstiger ist als Tarif B.

$$K_B(x) = F(x) \Leftrightarrow 0{,}24x + 5{,}2 = 25 \mid -5{,}2$$
$$\Leftrightarrow 0{,}24x = 19{,}8 \mid : 0{,}24$$
$$\Leftrightarrow x = x_2 = 82{,}5$$

Ab einer Surfdauer von 82,5 Stunden monatlich, sollte man auf die Flatrate umstellen.

A4 Ausführliche Lösung

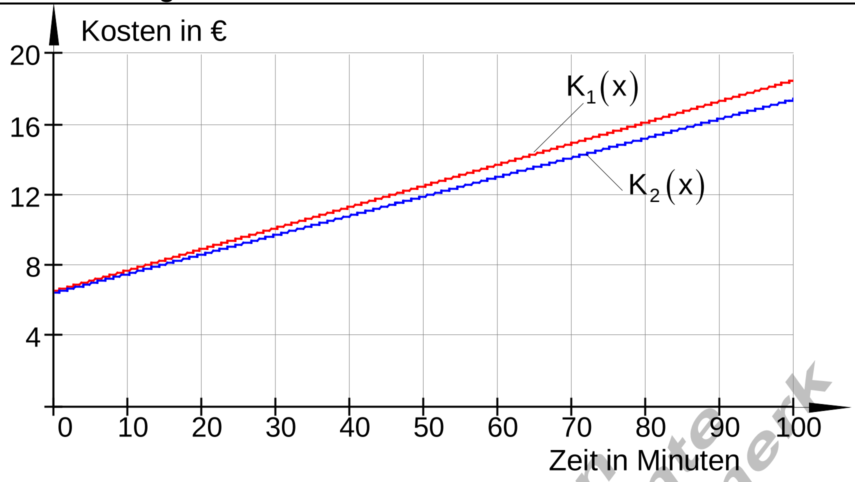
a) x – Achse in Minuten y – Achse Kosten in €

Holger: 30 min 10,10 €
60 min 13,70 €

$$K_1(x) = a_1x + a_0$$
$$P_1(30 \mid 10{,}1) \quad P_2(60 \mid 13{,}7)$$
$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{13{,}7 - 10{,}1}{60 - 30} = \frac{3{,}6}{30} = 0{,}12$$
$$K_1(x) = 0{,}12x + a_0 \text{ mit } P_1(30 \mid 10{,}1)$$
$$K_1(30) = 10{,}1 \Leftrightarrow 0{,}12 \cdot 30 + a_0 = 10{,}1$$
$$\Leftrightarrow 3{,}6 + a_0 = 10{,}1 \mid -3{,}6$$
$$\Leftrightarrow a_0 = 6{,}5$$
$$\underline{\underline{K_1(x) = 0{,}12x + 6{,}5}}$$

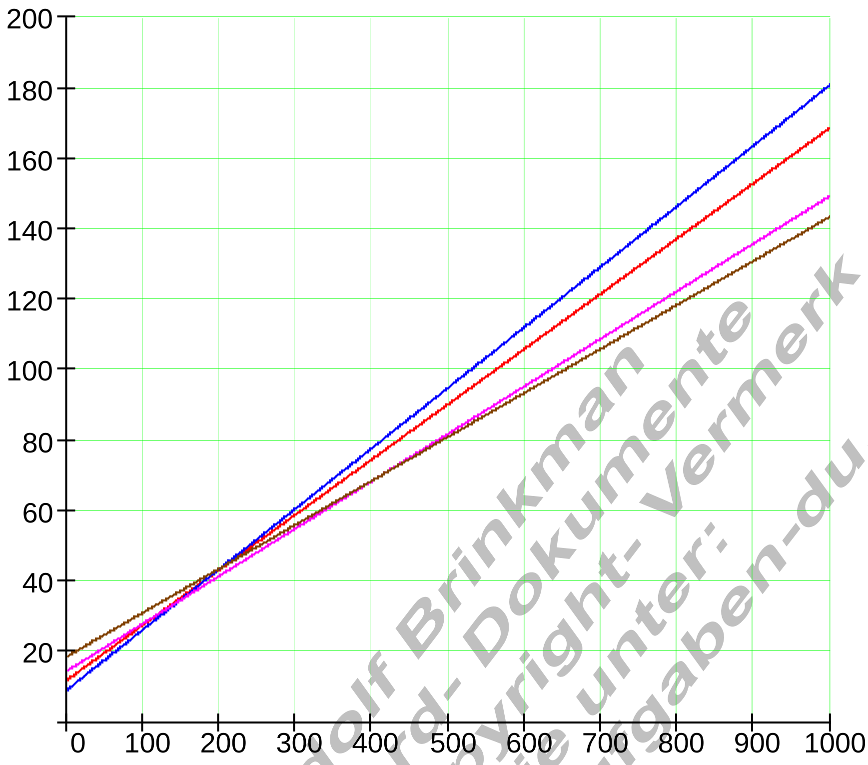
Ali 40 min 10,80 €
80 min 15,20 €

$$K_2(x) = a_1x + a_0$$
$$P_1(40 \mid 10{,}8) \quad P_2(80 \mid 15{,}2)$$
$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15{,}2 - 10{,}8}{80 - 40} = \frac{4{,}4}{40} = 0{,}11$$
$$K_2(x) = 0{,}11x + a_0 \text{ mit } P_1(40 \mid 10{,}8)$$
$$K_2(40) = 10{,}8 \Leftrightarrow 0{,}11 \cdot 40 + a_0 = 10{,}8$$
$$\Leftrightarrow 4{,}4 + a_0 = 10{,}8 \mid -4{,}4$$
$$\Leftrightarrow a_0 = 6{,}4$$
$$\underline{\underline{K_2(x) = 0{,}11x + 6{,}4}}$$

A4	Ausführliche Lösung	
	b)	

A4	Ausführliche Lösung	
	c)	Ali hat den günstigsten Vertrag, denn seine Kostenkurve $K_2(x)$ liegt immer unterhalb der von Holger. Die beiden Geraden schneiden sich auch nicht im positiven x- Bereich, da die Steigung von $K_2(x)$ geringer ist als die von $K_1(x)$, wird mit zunehmender Gesprächsdauer der Kostenunterschied immer größer. Der Schnittpunkt der Geraden liegt im negativen x- Bereich und hat in Bezug auf die Aufgabenstellung keine Bedeutung.

A5	Ausführliche Lösung			
a)	Tarif I: $K_1(x) = 0{,}157x + 11{,}80$	Tarif II: $K_2(x) = 0{,}172x + 9{,}00$	Tarif III: $K_3(x) = 0{,}135x + 14{,}40$	Tarif IV: $K_4(x) = 0{,}125x + 18{,}50$



A5 Ausführliche Lösung

b)

Tarif I: $K_1(800) = 0{,}157 \cdot 800 + 11{,}80 = \underline{\underline{137{,}40}}$

Tarif II: $K_2(800) = 0{,}172 \cdot 800 + 9{,}00 = \underline{\underline{146{,}60}}$

Tarif III: $K_3(800) = 0{,}135 \cdot 800 + 14{,}40 = \underline{\underline{122{,}40}}$

Tarif IV: $K_4(800) = 0{,}125 \cdot 800 + 18{,}50 = \underline{\underline{118{,}50}}$

Bei einem monatlichen Verbrauch von 800 kWh ist Tarif IV der günstigste.

A5 Ausführliche Lösung

c) Immer da wo sich zwei Graphen schneiden entstehen für einen bestimmten Verbrauch die gleichen Kosten.

A6 Ausführliche Lösung

$f(x) = 0{,}4x - 2$ Verschiebung un 4 Einheiten nach rechts bedeutet:

$g(x) = 0{,}4\left(x - 4\right) - 2 = \underline{\underline{0{,}4x - 3{,}6}}$

Das gleiche Ergebnis erhält man durch eine Verschiebung um 1,6 Einheiten nach unten.