

Lösung lineare Funktionen Teil IX

Ausführliche Lösungen:

A1	<p>Aufgabe</p> <p>Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P_1(4 -3,5)$ und $P_2(2,5 -1)$.</p> <p>Die Gerade h verläuft durch die Punkte $P_3(5 2,5)$ und $P_4\left(\frac{3}{2} \frac{25}{3}\right)$.</p> <p>Wie liegen die Geraden zueinander?</p>
----	---

A1	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>$g(x) : P_1\left(4 -\frac{7}{2}\right); P_2\left(\frac{5}{2} -1\right)$ $h(x) : P_3\left(5 \frac{5}{2}\right); P_4\left(\frac{3}{2} \frac{25}{3}\right)$</p> $a_{1g} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - \left(-\frac{7}{2}\right)}{\frac{5}{2} - 4} = \frac{-\frac{2}{2} + \frac{7}{2}}{\frac{5}{2} - \frac{8}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = -\frac{5}{3} \Rightarrow g(x) = -\frac{5}{3}x + a_{0g}$ <p>$P_1\left(4 -\frac{7}{2}\right) : g(4) = -\frac{5}{3} \cdot 4 + a_{0g} = -\frac{7}{2} \Rightarrow a_{0g} = \frac{19}{6} \Rightarrow g(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{19}{6}$</p> $a_{1h} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{\frac{25}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2} - 5} = \frac{\frac{50}{6} - \frac{15}{6}}{\frac{3}{2} - \frac{10}{2}} = \frac{\frac{35}{6}}{-\frac{7}{2}} = -\frac{35 \cdot 2}{7 \cdot 6} = -\frac{5}{3} \Rightarrow h(x) = -\frac{5}{3}x + a_{0h}$ <p>$P_3\left(5 \frac{5}{2}\right) : h(5) = -\frac{5}{3} \cdot 5 + a_{0h} = \frac{5}{2} \Rightarrow a_{0h} = \frac{65}{6} \Rightarrow h(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{65}{6}$</p> <p>Die Geraden $g(x)$ und $h(x)$ sind parallel aber verschieden.</p>
----	---

A2	<p>Aufgabe</p> <p>Bestimmen Sie den Funktionsterm und den Wertebereich der linearen Funktion $f(x)$, wenn gilt:</p>		
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; border-right: 1px solid black; padding: 5px;">a) $f(0) = 20; f(12) = 32; x > 0$</td> <td style="padding: 5px;">b) $f(-3) = 6; f(2) = -8; x \in [-3; 3]$</td> </tr> </table>	a) $f(0) = 20; f(12) = 32; x > 0$	b) $f(-3) = 6; f(2) = -8; x \in [-3; 3]$
a) $f(0) = 20; f(12) = 32; x > 0$	b) $f(-3) = 6; f(2) = -8; x \in [-3; 3]$		

A2	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>a) $f(0) = 20 \Rightarrow P_1(0 20) \Rightarrow a_0 = 20; f(12) = 32 \Rightarrow P_2(12 32)$</p> $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{32 - 20}{12 - 0} = 1 \Rightarrow \underline{f(x) = x + 20}$ <p>Wertemenge für $x > 0$: $W_f = \{y 20 < y < \infty\}_{\mathbb{R}}$</p>
----	--

A2	Ausführliche Lösung	
	<p>b) $f(-3) = 6 \Rightarrow P_1(-3 6)$; $f(2) = -8 \Rightarrow P_2(2 -8)$; $x \in [-3; 3]$</p> $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-8 - 6}{2 - (-3)} = -\frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{14}{5}x + a_0$ <p>$P_2(2 -8)$: $f(2) = -\frac{14}{5} \cdot 2 + a_0 = -8 \Rightarrow a_0 = -\frac{5}{12} \Rightarrow f(x) = -\frac{14}{5}x - \frac{5}{12}$</p> <p>Wertemenge durch einsetzen der Intervallgrenzen.</p> $f(-3) = -\frac{14}{5} \cdot (-3) - \frac{5}{12} = 6 \quad ; \quad f(3) = -\frac{14}{5} \cdot (3) - \frac{5}{12} = -\frac{54}{5} = -10,8$ $\Rightarrow W_f = \{y \mid -10,8 \leq y \leq 6\}_{\mathbb{R}}$	
A3	Aufgabe	
	Der Graph der linearen Funktion $f(x)$ wird um 3 LE nach links verschoben. Wie lautet die Gleichung $f^*(x)$ der verschobenen Geraden?	$f(x) = \frac{5}{3}x - 2 \quad D = \mathbb{R}$
A3	Ausführliche Lösung	
	<p>x - Verschiebung nach links um 3 LE bedeutet: $(x + 3)$</p> $f(x) = \frac{5}{3}x - 2 \Rightarrow f^*(x) = \frac{5}{3}(x + 3) - 2 = \frac{5}{3}x + 3$	
A4	Aufgabe	
	Gegeben sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Für welche x - Werte gilt $f(x) > g(x)$? $f(x) = 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = -0,5x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$	
A4	Ausführliche Lösung	
	<p>$f(x) = 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = -0,5x + 1 \quad x \in \mathbb{R} \quad f(x) > g(x)$</p> $\Rightarrow 2x - 3 > -0,5x + 1 \mid +0,5x \Leftrightarrow 2,5x - 3 > 1 \mid +3 \Leftrightarrow 2,5x > 4 \mid : 2,5 \Leftrightarrow \underline{x > 1,6}$ <p>Für $x > 1,6$ gilt $f(x) > g(x)$, d.h $f(x)$ verläuft oberhalb von $g(x)$.</p>	
A5	Aufgabe	
	Gegeben ist eine Gerade $g(x)$. Diese wird von einer Geraden $h(x)$ geschnitten. Bestimmen Sie eine Gleichung von $h(x)$ wenn gilt:	
	a) Schnitt auf der x - Achse.	b) Schnitt bei $x = -5$

A5	Ausführliche Lösung
a)	$g(x) = -3x + 2$ Nullstelle: $g(x_1) = -3x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$ Gerade durch den Nullpunkt: $f(x) = a_1 x$ Verschoben um $x_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow f^*(x) = a_1 \left(x - \frac{2}{3} \right)$ sind alle Geraden durch $P \left(\frac{2}{3} \mid 0 \right)$ Für z. B. $a_1 = 1$ gilt: $g(x) = x - \frac{2}{3}$ geht auch durch $P \left(\frac{2}{3} \mid 0 \right)$

A5	Ausführliche Lösung
b)	$g(x) = -3x + 2$ Schnitt bei $x = -5$ Schnittpunkt: $g(5) = -3 \cdot (-5) + 2 = 17 \Rightarrow P(-5 \mid 17)$ Gerade durch den Nullpunkt: $f(x) = a_1 x$ Verschoben um $x = -5$ und $y = 17 \Rightarrow f^*(x) = a_1(x + 5) + 17$ sind alle Geraden durch $P(-5 \mid 17)$ Für z. B. $a_1 = 1$ gilt: $g(x) = x + 22$ geht auch durch $P(-5 \mid 17)$

A6	Aufgabe
Eine Ursprungsgerade mit der Steigung $a_1 = -0,125$ wird so verschoben, dass sie die Gerade h mit der Gleichung $h(x) = -1,5(x - 2)$ auf der x - Achse schneidet. Beschreiben Sie die Verschiebung und bestimmen Sie die Gleichung der verschobenen Geraden.	

A6	Ausführliche Lösung
$f(x) = -\frac{1}{8}x$ Nullstelle von $h(x) = -1,5(x - 2)$ ist $x_1 = 2$ $f(x)$ wird um $x_1 = 2$ verschoben $\Rightarrow f^*(x) = -\frac{1}{8}(x - 2) = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}$	

A7	Aufgabe
Gegeben ist eine lineare Funktion $f(x)$. Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ schneidet den Graphen von $f(x)$ in P und die x - Achse in Q. Fertigen Sie eine Skizze an.	
a)	Bestimmen Sie die Koordinaten von P und Q, wenn $f(x) = 0,75x + 2$ ist.
b)	Für welche Werte von u liegt P oberhalb der x - Achse?
c)	$P(u \mid f(u))$ liegt im 1. Quadranten. $R(0 \mid 0)$, Q und P bilden die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie einen Term für den Flächeninhalt A dieses Dreiecks. Bestimmen Sie u so, dass gilt $A(u) = 10$.

A7	Ausführliche Lösung	
	a)	<u>$Q(u 0)$</u> Schnittpunkt von $f(x)$ mit $x = u : P(u f(u))$ $f(u) = \frac{3}{4}u + 2$

A7	Ausführliche Lösung	b) Bedingung: $f(u) > 0$ $\Rightarrow \frac{3}{4}u + 2 > 0 \Rightarrow u > -\frac{8}{3}$ dafür liegt P oberhalb der x - Achse
-----------	----------------------------	--

A7	Ausführliche Lösung	c) Dreiecksfläche: $A = \frac{1}{2}g \cdot h = \frac{1}{2}u \cdot f(u) = \frac{1}{2}u \cdot \left(\frac{3}{4}u + 2\right) = \frac{3}{8}u^2 + u$ $\Rightarrow A(u) = \frac{3}{8}u^2 + u$ $A(u) = 10 \Leftrightarrow \frac{3}{8}u^2 + u = 10 \Leftrightarrow \frac{3}{8}u^2 + u - 10 = 0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow u^2 + \frac{8}{3}u - \frac{80}{3} = 0$ $p = \frac{8}{3}; q = -\frac{80}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{80}{3} = \frac{256}{9}$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \Rightarrow u_1 = -\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{256}{9}} = -\frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{12}{3} = 4$ $u_2 = -\frac{4}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{20}{3}$ $A(u) = 10$ für <u>$u_1 = 4$</u> oder für <u>$u_2 = -\frac{20}{3}$</u>
-----------	----------------------------	--

A8	Aufgabe	Bestimmen Sie die Gleichung der Parallelen und der Orthogonalen zur Geraden g durch den Punkt P.
	a)	$g: x + 2 - 3y = 0; P(0 3)$
	b)	$g(x) = \frac{2}{3}x - 3; P(1 4)$
	c)	$g(x) = -1,5kx; P(1 0)$

A8	Ausführliche Lösung
a)	$g: x + 2 - 3y = 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad P(0 3) \Rightarrow a_0 = 3$ $\text{Parallele zu } g \text{ durch } P: \Rightarrow \underline{\underline{g_{\parallel}(x) = \frac{1}{3}x + 3}}$ $\text{Orthogonale zu } g \text{ durch } P:$ $\text{Steigung von } g_{\perp}: a_{1\perp} = -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3 \Rightarrow \underline{\underline{g_{\perp}(x) = -3x + 3}}$

A8	Ausführliche Lösung
b)	$g(x) = \frac{2}{3}x - 3 \quad P(1 4)$ $\text{Parallele zu } g \text{ durch } P: \Rightarrow a_{\parallel} = a_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow g_{\parallel}(x) = \frac{2}{3}x + a_{0\parallel}$ $P(1 4): g_{\parallel}(1) = \frac{2}{3} \cdot 1 + a_{0\parallel} = 4 \Rightarrow a_{0\parallel} = \frac{10}{3} \Rightarrow \underline{\underline{g_{\parallel}(x) = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}}}$ $\text{Orthogonale zu } g \text{ durch } P:$ $\text{Steigung von } g_{\perp}: a_{1\perp} = -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow g_{\perp}(x) = -\frac{3}{2}x + a_{0\perp}$ $P(1 4): g_{\perp}(1) = -\frac{3}{2} \cdot 1 + a_{0\perp} = 4 \Rightarrow a_{0\perp} = \frac{11}{2} \Rightarrow \underline{\underline{g_{\perp}(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}}}$

A8	Ausführliche Lösung
c)	$g(x) = -\frac{3}{2}kx \quad P(1 0)$ $\text{Parallele zu } g \text{ durch } P: \Rightarrow a_{\parallel} = a_1 = -\frac{3}{2}k \Rightarrow g_{\parallel}(x) = -\frac{3}{2}kx + a_{0\parallel}$ $P(1 0): g_{\parallel}(1) = -\frac{3}{2}k \cdot 1 + a_{0\parallel} = 0 \Rightarrow a_{0\parallel} = \frac{3}{2}k \Rightarrow \underline{\underline{g_{\parallel}(x) = -\frac{3}{2}kx + \frac{3}{2}k}}$ $\text{Orthogonale zu } g \text{ durch } P:$ $\text{Steigung von } g_{\perp}: a_{1\perp} = -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{-\frac{3}{2}k} = \frac{2}{3k} \Rightarrow g_{\perp}(x) = \frac{2}{3k}x + a_{0\perp}$ $P(1 0): g_{\perp}(1) = \frac{2}{3k} \cdot 1 + a_{0\perp} = 0 \Rightarrow a_{0\perp} = -\frac{2}{3k} \Rightarrow \underline{\underline{g_{\perp}(x) = \frac{2}{3k}x - \frac{2}{3k}}}$

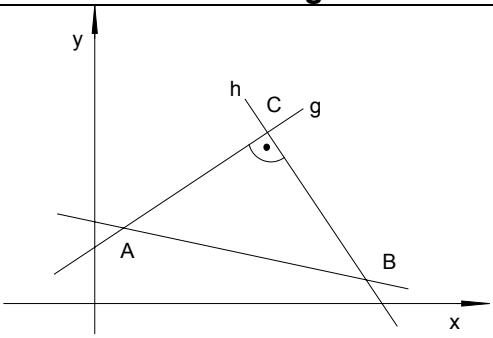
A9	Aufgabe
Die Gerade g verläuft durch die Punkte P_1 und P_2 . Untersuchen Sie die Lage zur Geraden h und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.	
$P_1(-1 1,5); P_2(-2 -2,5) \quad h: -x - 6 - 4y = 0$	

A9	Ausführliche Lösung
	$P_1\left(-1 \mid \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \mid -\frac{5}{2}\right) \quad h: -x - 6 - 4y = 0 \Rightarrow h(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$ $a_{1g} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{-2 - (-1)} = 4 \Rightarrow g(x) = 4x + a_{0g}$ $P_1\left(-1 \mid \frac{3}{2}\right): g(-1) = 4 \cdot (-1) + a_{0g} = \frac{3}{2} \Rightarrow a_{0g} = \frac{11}{2} \Rightarrow g(x) = 4x + \frac{11}{2}$ <p>Die Geraden <u>g und h sind orthogonal</u>, da $a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}} = -\frac{1}{-\frac{1}{4}} = 4$ ist.</p> <p>Schnittpunkte: $g(x_s) = h(x_s) \Leftrightarrow 4x_s + \frac{11}{2} = -\frac{1}{4}x_s - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_s = -\frac{28}{17}$</p> $y_s = g(x_s) = 4 \cdot \left(-\frac{28}{17}\right) + \frac{11}{2} = -\frac{37}{34} \Rightarrow S\left(-\frac{28}{17} \mid -\frac{37}{34}\right)$

A10	Aufgabe
	<p>Zeigen Sie: Die Gerade g und die Gerade h sind orthogonal.</p> <p>$g: y - \sqrt{2}x = 1 \quad h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$</p>

A10	Ausführliche Lösung
	$g: y - \sqrt{2}x = 1 \Rightarrow g(x) = \sqrt{2}x + 1$ $h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0 \Rightarrow h(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + 3$ <p>Bedingung für Orthogonalität: $a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}}$</p> $a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{q.e.d}$

A11	Aufgabe	
	Die Punkte A, B und C sind Eckpunkte eines Dreiecks. Für welche Werte von $k > 0$ ist das Dreieck rechtwinklig? (Rechter Winkel liegt bei C).	$A\left(\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); C(0 \mid k)$

A11	Ausführliche Lösung	
	 <p> $A\left(\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); C(0 \mid k)$ Bedingung: $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ </p>	<p>Steigung von \overline{AC}:</p> $a_{1\overline{AC}} = \frac{k - \frac{k}{3}}{0 - \sqrt{3k}} = -\frac{\frac{2}{3}k}{\sqrt{3k}} = -\frac{2k}{3\sqrt{3k}}$ <p>Steigung von \overline{BC}:</p> $a_{1\overline{BC}} = \frac{k - \frac{k}{3}}{0 - (-\sqrt{3k})} = \frac{\frac{2}{3}k}{\sqrt{3k}} = \frac{2k}{3\sqrt{3k}}$ <p>Für die Steigung zweier orthogonaler Geraden g und h gilt:</p> $a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}} \Leftrightarrow a_{1g} \cdot a_{1h} = -1$ $\Rightarrow -\frac{2k}{3\sqrt{3k}} \cdot \frac{2k}{3\sqrt{3k}} = -1 \Leftrightarrow k = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$