Lösung lineare Funktionen Teil IX

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung
	$g(x): P_1\left(4 \mid -\frac{7}{2}\right); P_2\left(\frac{5}{2} \mid -1\right) \quad h(x): P_3\left(5 \mid \frac{5}{2}\right); P_4\left(\frac{3}{2} \mid \frac{25}{3}\right)$
	$a_{1g} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-\left(-\frac{7}{2}\right)}{\frac{5}{2}-4} = \frac{-\frac{2}{2}+\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}-\frac{8}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{5\cdot 2}{3\cdot 2} = -\frac{5}{3} \Rightarrow g(x) = -\frac{5}{3}x + a_{0g}$
	$P_1\left(4 \mid -\frac{7}{2}\right): \quad g(4) = -\frac{5}{3}\cdot 4 + a_{0g} = -\frac{7}{2} \Rightarrow a_{0g} = \frac{19}{6} \Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{19}{6}}}$
	$a_{1h} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{\frac{25}{3}-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}-5} = \frac{\frac{50}{6}-\frac{15}{6}}{\frac{3}{2}-\frac{10}{2}} = \frac{\frac{35}{6}}{-\frac{7}{2}} = -\frac{35\cdot 2}{7\cdot 6} = -\frac{5}{3} \Rightarrow h(x) = -\frac{5}{3}x + a_{0h}$
	$P_3\left(5 \mid \frac{5}{2}\right): \quad h(5) = -\frac{5}{3}\cdot 5 + a_{0h} = \frac{5}{2} \Rightarrow a_{0h} = \frac{65}{6} \Rightarrow \underline{\underline{h(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{65}{6}}}$
	Die Geraden g(x) und h(x) sind parallel aber verschieden.

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(0) = 20 \Rightarrow P_1(0 \mid 20) \Rightarrow a_0 = 20; f(12) = 32 \Rightarrow P_2(12 \mid 32)$
		$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{32-20}{12-0} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = x + 20}}$
		Wertemenge für $x > 0$: $\underline{\underline{W_f = \{y \mid 20 < y < \infty\}_{\mathbb{R}}}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(-3) = 6 \Rightarrow P_1(-3 \mid 6); f(2) = -8 \Rightarrow P_2(2 \mid -8); x \in [-3;3]$
		$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-8-6}{2-(-3)} = -\frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{14}{5}x + a_0$
		$P_2(2 \mid -8): \quad f(2) = -\frac{14}{5}\cdot 2 + a_0 = -8 \Rightarrow a_0 = -\frac{5}{12} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{14}{5}x - \frac{5}{12}}}$
		Wertemenge durch einsetzen der Intervallgrenzen.
		$f(-3) = -\frac{14}{5}\cdot(-3) - \frac{5}{12} = 6 \quad ; \quad f(3) = -\frac{14}{5}\cdot(3) - \frac{5}{12} = -\frac{54}{5} = -10{,}8$
		$\Rightarrow \underline{\underline{W_f = \{y \mid -10{,}8 \le y \le 6\}_{\mathbb{R}}}}$

A3	Ausführliche Lösung
	x - Verschiebung nach links um 3 LE bedeutet: $(x+3)$ $f(x)=\frac{5}{3}x-2 \Rightarrow f^{*}(x)=\frac{5}{3}(x+3)-2=\underline{\underline{\frac{5}{3}x+3}}$

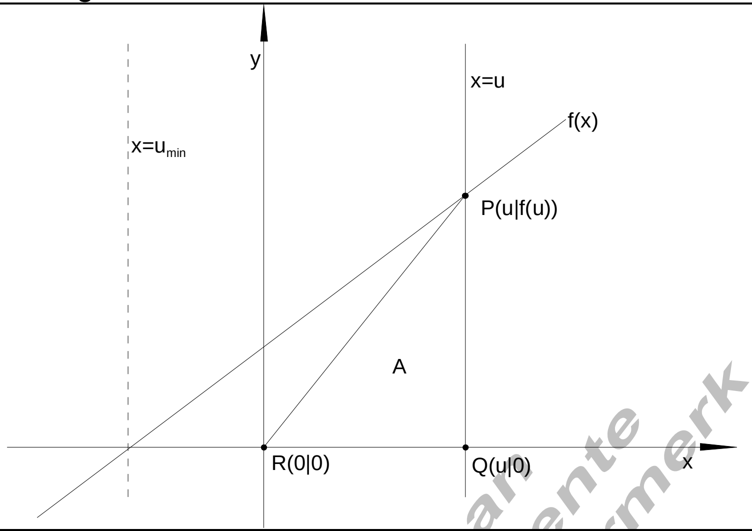
A4	Ausführliche Lösung
	$f(x)=2x-3 \quad : \quad g(x)=-0{,}5x+1 \quad x\in\mathbb{R} \quad f(x)>g(x)$ $\Rightarrow 2x-3>-0{,}5x+1 \mid +0{,}5x \Leftrightarrow 2{,}5x-3>1 \mid +3 \Leftrightarrow 2{,}5x>4 \mid :2{,}5 \Leftrightarrow \underline{\underline{x>1{,}6}}$ Für $x>1{,}6$ gilt $f(x)>g(x)$, d.h $f(x)$ verläuft oberhalb von $g(x)$.

A5	Ausführliche Lösung	
	a)	$g(x)=-3x+2$ Nullstelle: $g(x_1)=-3x_1+2=0 \Rightarrow x_1=\frac{2}{3}$ Gerade durch den Nullpunkt: $f(x)=a_1x$ Verschoben um $x_1=\frac{2}{3} \Rightarrow f^{*}(x)=a_1\left(x-\frac{2}{3}\right)$ sind alle Geraden durch $P\left(\frac{2}{3}\mid 0\right)$ Für z. B. $a_1=1$ gilt: $\underline{\underline{g(x)=x-\frac{2}{3}}}$ geht auch durch $P\left(\frac{2}{3}\mid 0\right)$

A5	Ausführliche Lösung	
	b)	$g(x)=-3x+2$ Schnitt bei $x=-5$ Schnittpunkt: $g(5)=-3\cdot(-5)+2=17 \Rightarrow P(-5\mid 17)$ Gerade durch den Nullpunkt: $f(x)=a_1x$ Verschoben um $x=-5$ und $y=17 \Rightarrow f^{*}(x)=a_1(x+5)+17$ sind alle Geraden durch $P(-5\mid 17)$ Für z. B. $a_1=1$ gilt: $\underline{\underline{g(x)=x+22}}$ geht auch durch $P(-5\mid 17)$

A6	Ausführliche Lösung
	$f(x)=-\frac{1}{8}x$ Nullstelle von $h(x)=-1{,}5(x-2)$ ist $x_1=2$ $f(x)$ wird um $x_1=2$ verschoben $\Rightarrow f^{*}(x)=-\frac{1}{8}(x-2)=\underline{\underline{-\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}}}$

A7 Ausführliche Lösung



a) $\underline{\underline{Q(u\,|\,0)}}$ Schnittpunkt von f(x) mit $x = u : \underline{\underline{P(u\,|\,f(u))}}$ $f(u) = \frac{3}{4}u + 2$

A7 Ausführliche Lösung

b) Bedingung: $f(u) > 0$

$\Rightarrow \frac{3}{4}u + 2 > 0 \Rightarrow u > -\frac{8}{3}$ dafür liegt P oberhalb der x - Achse

A7 Ausführliche Lösung

c) Dreiecksfläche: $A = \frac{1}{2}g \cdot h = \frac{1}{2}u \cdot f(u) = \frac{1}{2}u \cdot \left(\frac{3}{4}u + 2\right) = \frac{3}{8}u^2 + u$

$\Rightarrow \underline{\underline{A(u) = \frac{3}{8}u^2 + u}}$

$A(u) = 10 \Leftrightarrow \frac{3}{8}u^2 + u = 10 \Leftrightarrow \frac{3}{8}u^2 + u - 10 = 0$ quadratische Gleichung

$\Rightarrow u^2 + \frac{8}{3}u - \frac{80}{3} = 0 \quad p = \frac{8}{3};\ q = -\frac{80}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{80}{3} = \frac{256}{9}$

$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \Rightarrow u_1 = -\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{256}{9}} = -\frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{12}{3} = 4$

$u_2 = -\frac{4}{3} - \frac{16}{3} = -\frac{20}{3}$

$A(u) = 10$ für $\underline{\underline{u_1 = 4}}$ oder für $\underline{\underline{u_2 = -\frac{20}{3}}}$

A8 Ausführliche Lösung

a)

$$g: \quad x+2-3y=0 \Rightarrow g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \qquad P(0|3) \Rightarrow a_0=3$$

Parallele zu g durch P: $\Rightarrow \underline{\underline{g_{||}(x)=\frac{1}{3}x+3}}$

Orthogonale zu g durch P:

Steigung von $g_\perp$: $\quad a_{1\perp}=-\frac{1}{a_1}=-\frac{1}{\frac{1}{3}}=-3 \Rightarrow \underline{\underline{g_\perp(x)=-3x+3}}$

A8 Ausführliche Lösung

b)

$$g(x)=\frac{2}{3}x-3 \qquad P(1|4)$$

Parallele zu g durch P: $\Rightarrow a_{1||}=a_1=\frac{2}{3} \Rightarrow g_{||}(x)=\frac{2}{3}x+a_{0||}$

$P(1|4)$: $\quad g_{||}(1)=\frac{2}{3}\cdot 1+a_{0||}=4 \Rightarrow a_{0||}=\frac{10}{3} \Rightarrow \underline{\underline{g_{||}(x)=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}}}$

Orthogonale zu g durch P:

Steigung von $g_\perp$: $\quad a_{1\perp}=-\frac{1}{a_1}=-\frac{1}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2} \Rightarrow g_\perp(x)=-\frac{3}{2}x+a_{0\perp}$

$P(1|4)$: $\quad g_\perp(1)=-\frac{3}{2}\cdot 1+a_{0\perp}=4 \Rightarrow a_{0\perp}=\frac{11}{2} \Rightarrow \underline{\underline{g_\perp(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}}}$

A8 Ausführliche Lösung

c)

$$g(x)=-\frac{3}{2}kx \qquad P(1|0)$$

Parallele zu g durch P: $\Rightarrow a_{1||}=a_1=-\frac{3}{2}k \Rightarrow g_{||}(x)=-\frac{3}{2}kx+a_{0||}$

$P(1|0)$: $\quad g_{||}(1)=-\frac{3}{3}k\cdot 1+a_{0||}=0 \Rightarrow a_{0||}=\frac{3}{2}k \Rightarrow \underline{\underline{g_{||}(x)=-\frac{3}{2}kx+\frac{3}{2}k}}$

Orthogonale zu g durch P:

Steigung von $g_\perp$: $\quad a_{1\perp}=-\frac{1}{a_1}=-\frac{1}{-\frac{3}{2}k}=\frac{2}{3k} \Rightarrow g_\perp(x)=\frac{2}{3k}x+a_{0\perp}$

$P(1|0)$: $\quad g_\perp(1)=\frac{2}{3k}\cdot 1+a_{0\perp}=0 \Rightarrow a_{0\perp}=-\frac{2}{3k} \Rightarrow \underline{\underline{g_\perp(x)=\frac{2}{3k}x-\frac{2}{3k}}}$

A9 Ausführliche Lösung

$$P_1\left(-1 \mid \frac{3}{2}\right);\, P_2\left(-2 \mid -\frac{5}{2}\right) \qquad h:\quad -x-6-4y=0 \Rightarrow h(x)=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}$$

$$a_{1g}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{-2-(-1)}=4 \Rightarrow g(x)=4x+a_{0g}$$

$$P_1\left(-1 \mid \frac{3}{2}\right):\quad g(-1)=4\cdot(-1)+a_{0g}=\frac{3}{2} \Rightarrow a_{0g}=\frac{11}{2} \Rightarrow \underline{\underline{g(x)=4x+\frac{11}{2}}}$$

Die Geraden $\underline{\underline{\text{g und h sind orthogonal}}}$, da $a_{1g}=-\frac{1}{a_{1h}}=-\frac{1}{-\frac{1}{4}}=4$ ist.

Schnittpunkte: $g(x_s)=h(x_s) \Leftrightarrow 4x_s+\frac{11}{2}=-\frac{1}{4}x_s-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x_s=-\frac{28}{17}$

$$y_s=g(x_s)=4\cdot\left(-\frac{28}{17}\right)+\frac{11}{2}=-\frac{37}{34} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(-\frac{28}{17} \mid -\frac{37}{34}\right)}}$$

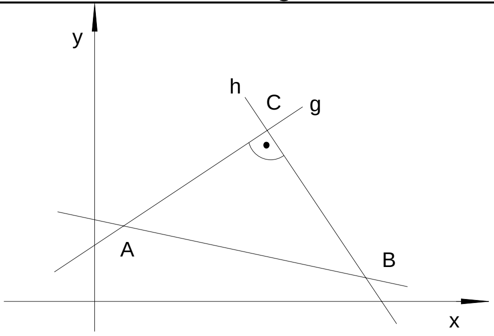
A10 Ausführliche Lösung

$$g:\quad y-\sqrt{2}x=1 \qquad \Rightarrow g(x)=\sqrt{2}x+1$$

$$h: -2y-\sqrt{2}x+6=0 \Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+3$$

Bedingung für Orthogonalität: $a_{1g}=-\frac{1}{a_{1h}}$

$$a_{1g}=-\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1\cdot 2}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \quad \text{q.e.d}$$

<table>
<tr><td rowspan="2">A11</td><td colspan="2">Ausführliche Lösung</td></tr>
<tr><td>

$A\left(\sqrt{3k}\,|\,\frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k}\,|\,\frac{k}{3}\right); C(0\,|\,k)$

Bedingung: $\overline{AC} \perp \overline{BC}$</td><td>Steigung von $\overline{AC}$:

$a_{1\overline{AC}} = \frac{k-\frac{k}{3}}{0-\sqrt{3k}} = -\frac{\frac{2}{3}k}{\sqrt{3k}} = -\frac{2k}{3\sqrt{3k}}$

Steigung von $\overline{BC}$:

$a_{1\overline{BC}} = \frac{k-\frac{k}{3}}{0-\left(-\sqrt{3k}\right)} = \frac{\frac{2}{3}k}{\sqrt{3k}} = \frac{2k}{3\sqrt{3k}}$

Für die Steigung zweier orthogonaler Geraden g und h gilt:

$a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}} \Leftrightarrow a_{1g} \cdot a_{1h} = -1$

$\Rightarrow -\frac{2k}{3\sqrt{3k}} \cdot \frac{2k}{3\sqrt{3k}} = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{k = \frac{27}{4}}}$</td></tr>
</table>