Lösungen lineare Funktionen Teil V

Ausführliche Lösungen:

A1	Aufgabe	
	Prüfen Sie ob die Geraden g, h, i durch einen Punkt verlaufen.	
	a)	$g(x)=x+1 \quad ; \quad h: 2y+x+4=0 \quad ; \quad i: 3y-5x=7$
	b)	$g(x)=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2} \quad ; \quad h(x)=-\frac{2}{3}x+2 \quad ; \quad i: 2x-y=3$

A1 Ausführliche Lösung

a)

$$g(x)=x+1; h: 2y+x+4=0 \Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}x-2; i: 3y-5x=7 \Rightarrow i(x)=\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}$$

$$g(x_s)=h(x_2) \Leftrightarrow x_s+1=-\frac{1}{2}x_s-2 \Rightarrow x_s=-2$$

$$y_s=g(x_s)=g(-2)=-1$$

Probe für $i(x_s)$: $\quad i(-2)=-1 \Rightarrow \underline{\underline{S(-2 \mid -1)}}$

Alle drei Geraden verlaufen durch den Punkt $S(-2 \mid -1)$

A1 Ausführliche Lösung

b)

$$g(x)=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2} \quad ; \quad h(x)=-\frac{2}{3}x+2 \quad ; \quad i: 2x-y=3 \Rightarrow i(x)=i(x)=2x-3$$

$$g(x_s)=h(x_s) \Leftrightarrow \frac{1}{6}x_s+\frac{3}{2}=-\frac{2}{3}x_s+2 \Rightarrow x_s=\frac{3}{5}$$

$$y_s=g(x_s)=g\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{8}{5} \Rightarrow \text{Für g(x) und h(x) gilt } S\left(\frac{3}{5} \middle| \frac{8}{5}\right)$$

Probe für i(x): $i(x_s)=i\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{9}{5} \Rightarrow$ i(x) geht nicht durch $S\left(\frac{3}{5} \middle| \frac{8}{5}\right)$

Die drei Geraden haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

A2 Aufgabe

Gegeben ist eine Wertetabelle für zwei lineare Funktionen f(x) und g(x).
Wo schneiden sich die Graphen beider Funktionen?
In welchem Quadranten liegt der Schnittpunkt?
Für welche x – Werte gilt f(x) < g(x)?

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1,5	3	4,5
$g(x)$	−1	1	3	5

A2 Ausführliche Lösung

$f(x): \quad P_1(0|0) \Rightarrow a_{0f} = 0 \quad P_2(2|3)$

$\Rightarrow a_{1f} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{3}{2}x}}$

$g(x): \quad P_3(1|1) \quad P_4(2|3)$

$\Rightarrow a_{1g} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow g(x) = 2x + a_{0g}$

$P_3(1|1): \quad g(1) = 2 \cdot 1 + a_{0g} = 1 \Rightarrow a_{0g} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{g(x) = 2x - 1}}$

Da $P_2(2|3)$ auf f liegt und $P_4(2|3)$ auf g liegt und die Koordinaten gleich sind, ist das auch der Schnittpunkt beider Geraden $S(2|3)$, er liegt im $\underline{\underline{\text{1. Quadranten}}}$.

$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x < 2x - 1 \,|\, -2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x < -1 \,|\, : \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > 2$

Für $\underline{\underline{x > 2}}$ gilt f(x) < g(x), f(x) verläuft unterhalb von g(x).

A3 Aufgabe

Bestimmen Sie den Schnittpunkt beider Geraden und zeichnen Sie die Graphen in ein Koordinatensystem.

$f(x) = 0{,}04x + 20 \quad ; \quad g(x) = 0{,}15x + 15$

A3 Ausführliche Lösung

$f(x) = 0{,}04x + 20$

$g(x) = 0{,}15x + 15$

$g(x_s) = f(x_s)$

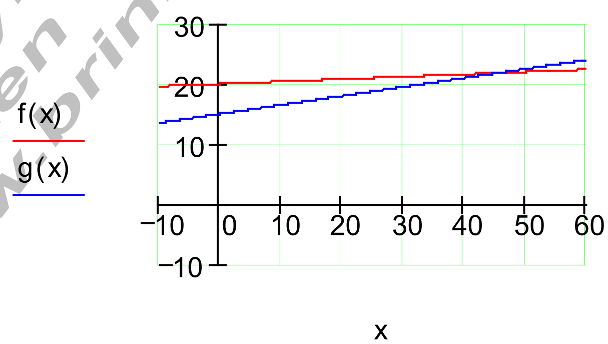
$\Leftrightarrow 0{,}15x + 15 = 0{,}04x + 20$

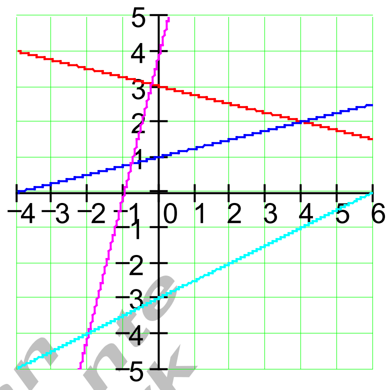
$\Rightarrow x_s = \frac{500}{11}$

$y_s = f(x_s) = f\left(\frac{500}{11}\right) = \frac{240}{11}$

$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{500}{11} \middle| \frac{240}{11}\right)}}$

$\approx S(45{,}45 | 21{,}82)$



A4	**Aufgabe**	
	Betrachten Sie das Schaubild mit den 4 Graphen.	
	a) Bestimmen Sie alle Funktionsgleichungen.	
	b) Berechnen Sie die Schnittpunkte von f(x) und g(x), sowie von h(x) und i(x)	
	c) Zwei Geraden schneiden sich außerhalb des Bildausschnittes. Berechnen Sie die Schnittpunkte.	
	d) Wie viele Schnittpunkte gibt es höchstens bei vier nicht paarweise parallelen Geraden?	

A4 Ausführliche Lösung

a) $f(x)=-\frac{1}{4}x+3\,;\ g(x)=\frac{1}{4}x+1;\ h(x)=4x+4\,;\ i(x)=\frac{1}{2}x-3$

A4 Ausführliche Lösung

b)
$$g(x_s)=f(x_s)\Leftrightarrow \frac{1}{4}x_s+1=-\frac{1}{4}x_s+3\Leftrightarrow x_s=4$$
$$y_s=g(x_s)=g(4)=2\Rightarrow \underline{\underline{S_{f,g}(4\,|\,2)}}$$
$$h(x_s)=i(x_s)\Leftrightarrow 4x_s+4=\frac{1}{2}x_s-3\Leftrightarrow x_s=-2$$
$$y_s=h(x_s)=h(-2)=-4\Rightarrow \underline{\underline{S_{h,i}(-2\,|\,-4)}}$$

A4 Ausführliche Lösung

c)

$i(x_s)=f(x_s)$	$i(x_s)=g(x_s)$
$\frac{1}{2}x_s-3=-\frac{1}{4}x_s+3\Leftrightarrow x_s=8$	$\frac{1}{2}x_s-3=\frac{1}{4}x_s+1\Leftrightarrow x_s=16$
$y_s=i(x_s)=i(8)=1$	$y_s=g(x_s)=g(16)=5$
$\Rightarrow \underline{\underline{S_{f,i}(8\,|\,1)}}$	$\Rightarrow \underline{\underline{S_{g,i}(16\,|\,5)}}$

A4 Ausführliche Lösung

d) Bei 4 paarweise nicht parallelen Geraden gibt es höchstens 6 Schnittpunkte.
Begründung:
Die 1. Gerade kann sich mit der 2. 3. und 4. schneiden. (3 Möglichkeiten)
Die 2. Gerade kann sich mit der 3. und 4. schneiden. 2 mit 1 wurde bereits berücksichtigt. (2 Möglichkeiten).
Die 3. Gerade kann sich mit der 4. schneiden. Weitere Schnittmöglichkeiten wurden bereits berücksichtigt. (1 Möglichkeit).

A5	**Aufgabe**
	Zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden schneiden sich in S(-2 | -1). Geben sie mögliche Geradengleichungen an.

A5	**Ausführliche Lösung**
	Ursprungsgerade: $g(x) = a_1 x$ die dazu senkrechte Ursprungsgerade: $h(x) = -\frac{1}{a_1}x$ Beide Geraden werden durch den Punkt $S(-2 \mid -1)$ verschoben. $\Rightarrow g^*(x) = a_1(x+2)-1$ und $h^*(x) = -\frac{1}{a_1}(x+2)-1$ Beispiel für $a_1 = 4$ $g^*(x) = 4(x+2)-1 = \underline{\underline{4x+7}}$ $h^*(x) = -\frac{1}{4}(x+2)-1 = \underline{\underline{-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}}}$

A6	**Aufgabe**					
	Die Gerade h steht senkrecht auf der Geraden g. Bestimmen Sie die Steigung von h.					
	a)	$a_{1g} = -0{,}5e$	b)	$a_{1g} = 2e^{-2}$	c)	$a_{1g} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

A6	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$a_{1g} = -\frac{1}{2}e \Rightarrow a_{1h} = -\frac{1}{a_{1g}} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}e} = \frac{2}{e} = \underline{\underline{2e^{-1}}}$

A6	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$a_{1g} = 2e^{-2} \Rightarrow a_{1h} = -\frac{1}{a_{1g}} = -\frac{1}{2e^{-2}} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}e^2}}$

A6	**Ausführliche Lösung**	
	c)	$a_{1g} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow a_{1h} = -\frac{1}{a_{1g}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}\sqrt{3}}}$

A7 Aufgabe

Eine Zeitschrift, die zum Preis von 2,20 € zu kaufen ist, hat eine Auflage von 120 000 Exemplaren. Mit Hilfe der Marktforschung stellt der Verlag fest, dass sich die Auflage bei einer Preissenkung um 0,20 € pro Zeitschrift um 5000 Exemplare erhöhen lässt, bei einer Preiserhöhung um 0,20 € verliert man 5000 Käufer.

a) Berechnen Sie den Preis bei einer Auflage von 140 000 Exemplaren.
Welcher Stückpreis ergibt sich bei einer Auflage von y Exemplaren?

b) Welche Verkaufszahlen kann der Verlag erwarten, wenn er den Preis der Zeitschrift auf 1,50 € senkt?

A7 Ausführliche Lösung

a) Die Auflage ist vom Preis abhängig.
$\Rightarrow$ Der Preis ist die unabhängige Variable x,
die Auflage ist die abhängige Variable y.

Preis 2,20 € Auflage 120 000 $\Rightarrow P_1(2{,}2\,|\,120\,000)$

Preis 2,00 € Auflage 125 000 $\Rightarrow P_2(2\,|\,125\,000)$

Preis 2,40 € Auflage 115 000 $\Rightarrow P_3(2{,}4\,|\,115\,000)$

Wenn alle drei Punkte auf einer Geraden liegen,
dann ist der Zusammenhang zwischen Preis und Auflage linear.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{125000 - 120000}{2 - 2{,}2} = \frac{5000}{-0{,}2} = -25000 \Rightarrow f(x) = -25000x + a_0$$

$P_2(2\,|\,125000):\quad f(2) = -25000 \cdot 2 + a_0 = 125000 \Rightarrow a_0 = 175000$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -25000x + 175000}}$$

Punktprobe für $P_3(2{,}4\,|\,115\,000)$: $\quad f(2{,}4) = -25000 \cdot 2{,}4 + 175000 = 115000$

Damit ist der Zusammenhang zwischen Preis und Auflage linear.

Preis bei einer Auflage von $y = 140000 :\Rightarrow P(x\,|\,140000)$

$\Rightarrow f(x) = -25000x + 175000 = 140000 \Leftrightarrow x = 1{,}4 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Preis } 1{,}40\text{ €}}}$

Preis bei einer Auflage von y Exemplaren $:\Rightarrow P(x\,|\,y)$

$$\Rightarrow f(x) = -25000x + 175000 = y \Leftrightarrow x = -\frac{y - 175000}{25000} = \underline{\underline{-\frac{y}{25000} + 7}}$$

A7 Ausführliche Lösung

b) Preis von 1,50 € $\Rightarrow P(1{,}4\,|\,y)$

$y = f(1{,}5) = -25000 \cdot 1{,}5 + 175000 = \underline{\underline{137500}}$

Bei einem Preis von 1,50 € ist mit einer Auflage von 137500 zu rechnen.