Lösungen Terme V

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{2a}-\frac{3}{4a}-\frac{a+b}{ab}=-\frac{4a+5b}{4ba}\,;\,a,b\neq 0$
	b)	$\frac{4x}{x-1}-\frac{10x}{2-x}=\frac{2x(7x-9)}{(x-2)(x-1)}\,;\,D=\mathbb{R}\setminus\{\,1;2\,\}$
	c)	$\frac{1}{k}-\frac{2}{x}+\frac{2k-x}{kx}=0\,;\,k,x\neq 0$
	d)	$k+3-\frac{k(k+3)}{k-3}=\frac{-3(k+3)}{k-3}\,;\,D=\mathbb{R}\setminus\{\,3\,\}$
	e)	$\frac{3x}{(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}-\frac{6}{(2-x)^2}=\frac{1}{x-2}\,;\,D=\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\}$
	f)	$\frac{1}{1-k}+\frac{1}{1+k}+\frac{2}{k^2-1}-4=-4\,;\,D=\mathbb{R}\setminus\{\,-1;1\,\}$

E2	Ergebnisse			
	a)	$\frac{\frac{x}{2}}{k}+\frac{3}{k}=\frac{x+6}{2k}\,;\,k\neq 0$	b)	$\frac{\frac{k}{4}-\frac{k}{3}}{\frac{3k}{4}-\frac{k}{3}}=-\frac{1}{5}\,;\,k\neq 0$
	c)	$\frac{\frac{x}{k}}{2k}+\frac{4x}{k^2}=\frac{9x}{2k^2}\,;\,k\neq 0$	d)	$\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k}+\frac{1}{k-1}=\frac{-1}{k-1}\,;\,k\neq 1$
	e)	$\frac{k+2-\frac{k(k+2)}{k-1}}{2}=-\frac{k+2}{2(k-1)}\,;\,k\neq 1$	f)	$\frac{x}{x-1}:\frac{1}{x^2-x}=x^2\,;\,k\neq 0\,;1$

E3	Ergebnisse	
	a)	$\frac{2-k}{1-k}-k=1-k+\frac{1}{1-k}$ für $k\neq 1 \Leftrightarrow \frac{-k^2+2k-2}{k-1}=\frac{-k^2+2k-2}{k-1}$
	b)	$\left(1+\frac{k-1}{2}\right):\left(k-\frac{k-1}{2}\right)=1\Leftrightarrow\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)=1$

E4	Ergebnisse	
	a)	$\frac{3x^2-3}{x^2+3x}-\frac{2x-2}{x+3}=\frac{x-1}{x}\,;\,D=\mathbb{R}\setminus\{\,-3\,;0\,\}$
	b)	$(x^2+2x+1)\cdot\frac{2x+1}{2x+2}=\frac{(x+1)(2x+1)}{2}\,;\,D=\mathbb{R}\setminus\{\,-1\,\}$
	c)	$\frac{ax^2+2x}{ax+2x^2}=\frac{ax+2}{a+2x}\,;\,D=\mathbb{R}\setminus\left\{\,-\frac{a}{2}\,;0\,\right\}$

E5	Ergebnisse	
	a)	$2x+1+\frac{3}{x-2}=\frac{(x-2)(2x+1)}{x-2}+\frac{3}{x-2}=\frac{2x^2-3x+1}{x-2}$
	b)	$\frac{x^2(x+1)}{(x+1)}-\frac{x(x+1)}{(x+1)}+\frac{1(x+1)}{(x+1)}-\frac{3}{x+1}=\frac{x^3-2}{x+1}$

E6	Folgende Terme sind äquivalent:
	$1\Leftrightarrow 13$ | $2\Leftrightarrow 11$ | $3\Leftrightarrow 15$ | $4\Leftrightarrow 12$ | $5\Leftrightarrow 7$ | $6\Leftrightarrow 16$ | $8\Leftrightarrow 9$ | $10\Leftrightarrow 17$ | $14\Leftrightarrow 18$
	$1\Leftrightarrow 13:\quad \frac{4}{3}x^2\left(3-6x^2\right)\Leftrightarrow 4x^2-8x^4$
	$2\Leftrightarrow 11:\quad \frac{3x(2x+1)}{12x^2-3}\Leftrightarrow \frac{x}{2x-1}$
	$3\Leftrightarrow 15:\quad \frac{x^2-8x}{x-3}\Leftrightarrow x-5-\frac{15}{x-3}$
	$4\Leftrightarrow 12:\quad 9xy^2-18x^2y\Leftrightarrow 9xy(y-2x)$
	$5\Leftrightarrow 7:\quad (3a+5)^2\Leftrightarrow 9a^2+30a+25$
	$6\Leftrightarrow 16:\quad (4-x)x+x^2\Leftrightarrow 4x$
	$8\Leftrightarrow 9:\quad x^2(3-x)(x+3)\Leftrightarrow 9x^2-x^4$
	$10\Leftrightarrow 17:\quad x^2(3-x)+2x^3+x^2\Leftrightarrow x^2(4+x)$
	$14\Leftrightarrow 18:\quad (xy+x)^2\Leftrightarrow x^2(y+1)^2$

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung
a)	

$\frac{1}{2a}-\frac{3}{4a}-\frac{a+b}{ab}$ Der Nenner darf nicht Null werden also $a,b\neq 0$

Hauptnenner: 4ab

$$\Rightarrow \frac{1\cdot 2b}{2a\cdot 2b}-\frac{3\cdot b}{4ab}-\frac{4(a+b)}{4ab}=\frac{2b}{4ab}-\frac{3b}{4ab}-\frac{4a+4b}{4ab}$$

Bruchstrich ersetzt Klammer

$$=\frac{2b-3b-(4a+4b)}{4ab}=\frac{2b-3b-4a-4b}{4ab}=\frac{-5b-4a}{4ab}=\underline{\underline{-\frac{4a+5b}{4ab}}}$$

A1	Ausführliche Lösung
b)	

$\frac{4x}{x-1}-\frac{10x}{2-x}$ Der Nenner darf nicht Null werden $\Rightarrow x\neq 1;\ x\neq 2$

$\frac{4x}{x-1}-\frac{10x}{2-x}$ $HN=(x-1)(2-x)$

$$\Rightarrow \frac{4x(2-x)}{(x-1)(2-x)}-\frac{10x(x-1)}{(x-1)(2-x)}=\frac{8x-4x^2-(10x^2-10x)}{(x-1)(2-x)}$$

$$=\frac{8x-4x^2-10x^2+10x}{(x-1)(2-x)}=\frac{-14x^2+18x}{(x-1)(2-x)}=\frac{(-1)(14x^2-18x)}{(-1)(x-2)(x-1)}$$

$$=\underline{\underline{\frac{2x(7x-9)}{(x-2)(x-1)}}};D=\mathbb{R}\setminus\{\,1;2\,\}$$

A1	Ausführliche Lösung
c)	

$\frac{1}{k}-\frac{2}{x}+\frac{2k-x}{kx}\Rightarrow k;x\neq 0$ Hauptnenner: kx

$$\Rightarrow \frac{1x}{kx}-\frac{2k}{kx}+\frac{2k-x}{kx}=\frac{x-2k+2k-x}{kx}=\frac{0}{kx}=\underline{\underline{0}}$$

A1	Ausführliche Lösung
d)	

$k+3-\frac{k(k+3)}{k-3}\Rightarrow k\neq 3$ Hauptnenner: $k-3$

$$\Rightarrow \frac{(k+3)(k-3)}{k-3}-\frac{k(k+3)}{k-3}=\frac{(k+3)(k-3)-k(k+3)}{k-3}$$

$$=\frac{(k+3)\left[(k-3)-k\right]}{k-3}=\frac{(k+3)[k-3-k]}{k-3}=\frac{(k+3)[-3]}{k-3}$$

$$=\underline{\underline{\frac{-3(k+3)}{k-3}}};D=\mathbb{R}\setminus\{\,3\,\}$$

A1 Ausführliche Lösung

e)

$$\frac{3x}{(x-2)^2}-\frac{2}{x-2}-\frac{6}{(2-x)^2}\Rightarrow x\neq 2 \text{ Hauptnenner: } (x-2)^2$$

Denn $(2-x)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2$ weil $(2-x)^2=\left[-1(x-2)\right]^2=(-1)^2(x-2)^2=(x-2)^2$

$$\frac{3x}{(x-2)^2}-\frac{2(x-2)}{(x-2)^2}-\frac{6}{(x-2)^2}=\frac{3x-2(x-2)-6}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{3x-2x+4-6}{(x-2)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}=\underline{\underline{\frac{1}{x-2}}}\;;D=\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\}$$

A1 Ausführliche Lösung

f)

$$\frac{1}{1-k}+\frac{1}{1+k}+\frac{2}{k^2-1}-4\Rightarrow k\neq\pm1 \text{ HN}=k^2-1=(k-1)(k+1)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(k-1)}+\frac{1}{(k+1)}+\frac{2}{k^2-1}-4$$

$$=-\frac{1(k+1)}{(k-1)(k+1)}+\frac{1(k-1)}{(k+1)(k-1)}+\frac{2}{k^2-1}-4\frac{k^2-1}{k^2-1}$$

$$=\frac{-(k+1)+(k-1)+2-4\left(k^2-1\right)}{k^2-1}=\frac{-k-1+k-1+2-4k^2+4}{k^2-1}$$

$$=\frac{-4k^2+4}{k^2-1}=\frac{-4\left(k^2-1\right)}{k^2-1}=\underline{\underline{-4}}\;;D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$$

A2 Ausführliche Lösung

a)

$$\frac{\frac{x}{2}}{k}+\frac{3}{k}\Rightarrow k\neq 0 \text{ Doppelbruch: } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

$$\frac{\frac{x}{2}}{k}+\frac{3}{k}=\frac{\frac{x}{2}}{\frac{k}{1}}+\frac{3}{k}=\frac{x\cdot1}{2\cdot k}+\frac{3}{k}\text{ HN}=2k\Rightarrow\frac{x}{2\cdot k}+\frac{3\cdot2}{2k}=\underline{\underline{\frac{x+6}{2k}}}$$

A2 Ausführliche Lösung

b)

$$\frac{\frac{k}{4}-\frac{k}{3}}{\frac{3k}{4}-\frac{k}{3}}\Rightarrow k\neq 0 \text{ Da der Nenner nicht Null werden darf}$$

$$\frac{\frac{k}{4}-\frac{k}{3}\quad \text{HN}=12}{\frac{3k}{4}-\frac{k}{3}\quad \text{HN}=12}=\frac{\frac{3k}{12}-\frac{4k}{12}}{\frac{9k}{12}-\frac{4k}{12}}=\frac{\frac{-k}{12}}{\frac{5k}{12}}=\frac{-12k}{12\cdot5k}=\underline{\underline{-\frac{1}{5}}}$$

A2 Ausführliche Lösung

c)

$$\frac{\frac{x}{k}}{2k}+\frac{4x}{k^2}\Rightarrow k\neq 0$$

$$\text{Doppelbruch: }\frac{\frac{x}{k}}{\frac{2k}{1}}+\frac{4x}{k^2}=\frac{x}{2k^2}+\frac{4x}{k^2}\quad HN=2k^2$$

$$\Rightarrow\frac{x}{2k^2}+\frac{2\cdot 4x}{2k^2}=\frac{x+8x}{2k^2}=\frac{9x}{2k^2}$$

A2 Ausführliche Lösung

d)

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k}+\frac{1}{k-1}\Rightarrow k\neq 1$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k}+\frac{1}{k-1}=\frac{1}{\frac{1-k}{2}}+\frac{1}{k-1}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1-k}{2}}+\frac{1}{k-1}$$

$$=\frac{2}{1-k}+\frac{1}{k-1}=-\frac{2}{k-1}+\frac{1}{k-1}=\frac{-2+1}{k-1}=\frac{-1}{k-1}$$

A2 Ausführliche Lösung

e)

$$\frac{k+2-\frac{k(k+2)}{k-1}}{2}\Rightarrow k\neq 1$$

$$\frac{k+2-\frac{k(k+2)}{k-1}}{2}=\frac{\frac{(k+2)(k-1)}{k-1}-\frac{k(k+2)}{k-1}}{2}$$

$$=\frac{\frac{(k+2)(k-1)-k(k+2)}{k-1}}{\frac{2}{1}}=\frac{(k+2)(k-1)-k(k+2)}{2(k-1)}$$

$$=\frac{(k+2)\left[(k-1)-k\right]}{2(k-1)}=\frac{(k+2)(-1)}{2(k-1)}=-\frac{k+2}{2(k-1)}$$

A2 Ausführliche Lösung

f)

$$\frac{x}{x-1}:\frac{1}{x^2-x}\Rightarrow k\neq 0\,;1$$

$$\frac{x}{x-1}:\frac{1}{x^2-x}=\frac{x\left(x^2-x\right)}{x-1}=\frac{x^2(x-1)}{x-1}=x^2$$

A3 Ausführliche Lösung

a) $\dfrac{2-k}{1-k}-k=1-k+\dfrac{1}{1-k}$ für $k\neq 1$

Linke Seite:

$$\frac{2-k}{1-k}-k=\frac{2-k}{1-k}-\frac{k(1-k)}{1-k}=\frac{2-k-k(1-k)}{1-k}=\frac{2-k-k+k^2}{1-k}=\frac{k^2-2k+2}{1-k}$$

Rechte Seite:

$$1-k+\frac{1}{1-k}=\frac{(1-k)(1-k)}{1-k}+\frac{1}{1-k}=\frac{(1-k)(1-k)+1}{1-k}=\frac{1-2k+k^2+1}{1-k}=\frac{k^2-2k+2}{1-k}$$

A3 Ausführliche Lösung

b) $\left(1+\dfrac{k-1}{2}\right):\left(k-\dfrac{k-1}{2}\right)=1$

$$\left(\frac{2}{2}+\frac{k-1}{2}\right):\left(\frac{2k}{2}-\frac{k-1}{2}\right)=\frac{2+k-1}{2}:\frac{2k-(k-1)}{2}$$

$$=\underline{\underline{\frac{k+1}{2}:\frac{k+1}{2}=1}}$$

A4 Ausführliche Lösung

a) $\dfrac{3x^2-3}{x^2+3x}-\dfrac{2x-2}{x+3}=\dfrac{3x^2-3}{x(x+3)}-\dfrac{2x-2}{x+3}\Rightarrow \mathbb{R}\setminus\{-3\,;0\}$

$$\frac{3x^2-3}{x(x+3)}-\frac{2x-2}{x+3}=\frac{3x^2-3}{x(x+3)}-\frac{x(2x-2)}{x(x+3)}$$

$$=\frac{3x^2-3-x(2x-2)}{x(x+3)}=\frac{3x^2-3-2x^2+2x}{x(x+3)}=$$

Polynomdivision: $(x^2+2x-3):(x+3)=x-1$

$$\begin{array}{l} -(x^2+3x) \\ \hline \quad -x-3 \\ \quad -(-x-3) \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-3}{x(x+3)}=\frac{(x-1)(x+3)}{x(x+3)}=\underline{\underline{\frac{x-1}{x}}}$$

A4 Ausführliche Lösung

b)
$$\left(x^2+2x+1\right)\cdot\frac{2x+1}{2x+2}\Rightarrow x\neq -1$$
$$=\frac{(x+1)^2(2x+1)}{2x+2}=\frac{(x+1)^2(2x+1)}{2(x+1)}=\underline{\underline{\frac{(x+1)(2x+1)}{2}}}\,;\,D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

A4 Ausführliche Lösung

c) $\frac{ax^2+2x}{ax+2x^2}$ Der Nenner darf nicht Null werden.

$$ax+2x^2=0\Leftrightarrow x(a+2x)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0\text{ und }a+2x=0\Rightarrow x=-\frac{a}{2}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{a}{2};0\right\}$$
$$\frac{ax^2+2x}{ax+2x^2}=\frac{x(ax+2)}{x(a+2x)}=\underline{\underline{\frac{ax+2}{a+2x}}}$$

A5 Ausführliche Lösung

a) $\frac{2x^2-3x+1}{x-2}$

$$2x+1+\frac{3}{x-2}$$
$$=\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}+\frac{3}{x-2}$$
$$=\frac{2x^2-4x+x+3}{x-2}$$
$$=\frac{2x^2-3x+1}{x-2}$$

A5 Ausführliche Lösung

b)
$$x^2-x+1-\frac{3}{x+1}$$
$$=\frac{\left(x^2-x+1\right)(x+1)}{x+1}-\frac{3}{x+1}$$
$$=\frac{\left(x^2-x+1\right)(x+1)-3}{x+1}$$
$$=\frac{x^3-x^2+x+x^2-x+1-3}{x+1}$$
$$=\frac{x^3-2}{x+1}$$

$\frac{x^3-2}{x+1}$

A6	Ausführliche Lösung

$(1): \frac{4}{3}x^2\left(3-6x^2\right) = 4x^2 - 8x^4 \quad (13)\Downarrow$

$(2): \frac{3x(2x+1)}{12x^2-3} = \frac{3x(2x+1)}{3\left(4x^2-1\right)} = \frac{2x^2+x}{4x^2-1} = \frac{x(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{x}{(2x-1)} \quad (11)\Downarrow$

$(3): \frac{x^2-8x}{x-3} \quad (15)\Downarrow$

$(4): 9xy^2 - 18x^2y \quad (12)\Downarrow$

$(5): (3a+5)^2 = 9a^2 + 30a + 25 \quad (7)\Downarrow$

$(6): (4-x)x + x^2 = 4x - x^2 + x^2 = 4x \quad (16)\Downarrow$

$(7): 9a^2 + 30a + 25 \quad (5)\Uparrow$

$(8): x^2(3-x)(x+3) = x^2\cdot(-1)(x-3)(x+3) = -x^2\left(x^2-9\right) = -x^4 + 9x^2 \quad (9)\Downarrow$

$(9): 9x^2 - x^4 = -x^4 + 9x^2 \quad (8)\Uparrow$

$(10): x^2(3-x) + 2x^3 + x^2 = 3x^2 - x^3 + 2x^3 + x^2 = 4x^2 + x^3 \quad (17)\Downarrow$

$(11): \frac{x}{2x-1} \quad (2)\Uparrow$

$(12): 9xy(y-2x) = 9xy^2 - 18x^2y \quad (4)\Uparrow$

$(13): 4x^2 - 8x^4 \quad (1)\Uparrow$

$(14): (xy+x)^2 = \left[x(y+1)\right]^2 = x^2(y+1)^2 \quad (18)\Downarrow$

$(15): x - 5 - \frac{15}{x-3} = \frac{(x-3)(x-5)-15}{x-3} = \frac{x^2-8x+15-15}{x-3} = \frac{x^2-8x}{x-3} \quad (3)\Uparrow$

$(16): 4x \quad (6)\Uparrow$

$(17): x^2(4+x) = 4x^2 + x^3 \quad (10)\Uparrow$

$(18): x^2(y+1)^2 \quad (14)\Uparrow$

Folgende Terme sind äquivalent:

$1 \Leftrightarrow 13$	$2 \Leftrightarrow 11$	$3 \Leftrightarrow 15$	$4 \Leftrightarrow 12$	$5 \Leftrightarrow 7$	$6 \Leftrightarrow 16$	$8 \Leftrightarrow 9$	$10 \Leftrightarrow 17$	$14 \Leftrightarrow 18$