

Lösungen quadratische Gleichungen VIII

Ergebnisse:

E1	Aufgabe	
	Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen.	
	a)	$-24 - x = 6x^2 + 23x + 12$
	b)	$0 = 0,1x^2 + 0,4x + 0,4$
	c)	$\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{2}{5} = 0$
d)	$x^2 + 2x + 25 = 0$	
e)	$x^2 - 2x + 2 = -4x^2 + 2x - 6$	
f)	$x^2 - 12x = 0$	

E1	Ergebnis	
	a)	$-24 - x = 6x^2 + 23x + 12 \quad +24 + x$ $\Leftrightarrow 6x^2 + 24x + 36 = 0 \quad :6$ $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 6 = 0$ $p = 4 \quad q = 6 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 6 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{keine Lösung}}}$

E1	Ergebnis	
	b)	$0 = 0,1x^2 + 0,4x + 0,4 \quad \cdot 10$ $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$ $p = 4 \quad q = 4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{eine Lösung}$ $x_1 = -\frac{p}{2} = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$

E1	Ergebnis	
	c)	$\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{2}{5} = 0 \quad \cdot 4$ $\Leftrightarrow x^2 + 8x - \frac{8}{5} = 0$ $p = 8 \quad q = -\frac{8}{5} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 + \frac{8}{5} = \frac{88}{5} \Rightarrow \text{zwei Lösungen}$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -4 \pm \sqrt{\frac{88}{5}} \Rightarrow \underline{\underline{x_1 \approx 0,2 \quad \text{oder} \quad x_2 \approx -8,2}}$

E1	Ergebnis	
	d)	$x^2 + 2x + 25 = 0$ $p = 2 \quad q = 25 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - 25 = -24 \Rightarrow \underline{\underline{\text{keine Lösung}}}$

E1	Ergebnis
	<p>e) $x^2 - 2x + 2 = -4x^2 + 2x - 6 \quad +4x^2 - 2x + 6$</p> <p>$\Leftrightarrow 5x^2 - 4x + 8 = 0 \quad :5$</p> <p>$\Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{8}{5} = 0$</p> <p>$p = -\frac{4}{5} \quad q = \frac{8}{5} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0,16 - 1,6 = -1,44 \Rightarrow$ <u>keine Lösung</u></p>

E1	Ergebnis
	<p>f) $x^2 - 12x = 0$ Die Lösung wird durch ausklammern von x gefunden:</p> <p>$x(x - 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ oder $(x - 12) = 0 \Rightarrow x_2 = 12$</p> <p><u>$L = \{0; 12\}$</u></p>

E2	Aufgabe
	<p>Analysieren Sie die p-q-Formel.</p> <p>Geben Sie an, unter welchen Bedingungen</p> <ul style="list-style-type: none"> - keine Lösung - eine Lösung - zwei Lösungen auftreten

E2	Ergebnis
	<p>Die p - q - Formel lautet: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$</p> <p>Der Radikand $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ wird auch <u>Diskriminante D</u> genannt.</p> <p>Ist der Wert für D negativ ($D < 0$), so kann die Wurzel nicht berechnet werden. \Rightarrow keine Lösung.</p> <p>Ist der Wert für D gleich Null ($D = 0$), so ist auch die Wurzel 0. \Rightarrow eine Lösung $\left(-\frac{p}{2}\right)$</p> <p>Ist der Wert für D größer Null ($D > 0$), so ist die Wurzel lösbar. \Rightarrow zwei Lösungen $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>Zusammenfassung: $D < 0 \Rightarrow$ keine Lösung $D = 0 \Rightarrow$ eine Lösung $D > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen</p> </div> <p>Um sich Arbeit zu ersparen ist es daher sinnvoll, zuerst die Diskriminante zu berechnen.</p>

E3	Aufgabe	
	Bestimmen Sie k so, dass genau eine Lösung existiert. Berechnen Sie diese.	$x^2 - 4x - k = 0$

E3	Ergebnis
	$x^2 - 4x - k = 0 \Rightarrow p = -4 \quad q = -k$ Eine Lösung $\Rightarrow D = 0$
	also $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{4}{2}\right)^2 - (-k) = 4 + k = 0 \Rightarrow \underline{\underline{k = -4}}$
	Lösung: $x_1 = -\frac{p}{2} = -\left(-\frac{4}{2}\right) = \underline{\underline{2}}$

E4	Aufgabe	
	Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen.	
	a) $\frac{x}{3} - x^2 = 0$	b) $73 - 52s + 14s^2 = 25$
d) $\frac{x^2}{a} - e^{-2} = 0$	e) $2a^2 + 7a + 3 = 0$	f) $\frac{1}{4}x^2 + 65x - 3600 = 0$

E4	Ergebnisse
	a) $\frac{x}{3} - x^2 = 0 \Rightarrow L = \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$
	b) $73 - 52s + 14s^2 = 25 \Rightarrow L = \left\{\frac{12}{7}; 2\right\}$
	c) $8,5x = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 200 \Rightarrow L = \{34,06; 93,93\}$
	d) $\frac{x^2}{a} - e^{-2} = 0 \Rightarrow L = \left\{\frac{\sqrt{a}}{e}\right\}; a > 0$
	e) $2a^2 + 7a + 3 = 0 \Rightarrow L = \left\{-3; -\frac{1}{2}\right\}$
	f) $\frac{1}{4}x^2 + 65x - 3600 = 0 \Rightarrow L = \{-306,91; 46,91\}$

E5	Aufgabe	
	Gegeben ist die Gleichung:	$2x + \frac{2}{x} = 5$
	a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.	
	b) Welche Zahl müsste statt 5 auf der rechten Seite der Gleichung stehen, damit die sonst unveränderte Gleichung die Lösung $2^{1/2}$ hat?	

E5	Ergebnisse	
	a)	$2x + \frac{2}{x} = 5 \Rightarrow D = \mathbb{R}^* \quad L = \{0,5; 2\}$
	b)	$2\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

E6	Aufgabe	
	Ein Rechteck ist 6 m lang und 4 m breit. Länge und Breite sind um den gleichen Betrag so zu verlängern, dass die Fläche verdoppelt wird.	

E6	Ergebnis	
	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center; margin-right: 20px;"> <p>6 m</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <p>4 m</p> <p>$A = 6 \text{ m} \cdot 4 \text{ m}$ $= 24 \text{ m}^2$</p> </div> </div> <div style="margin: 0 20px;">\Rightarrow</div> <div style="text-align: center; margin-left: 20px;"> <p>6 m + x</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <p>4 m + x</p> <p>$2A =$ $(6 \text{ m} + x) \cdot (4 \text{ m} + x)$ $= 48 \text{ m}^2$</p> </div> </div> </div> <p>$(6 \text{ m} + x) \cdot (4 \text{ m} + x) = 48 \text{ m}^2$</p> <p>$\Leftrightarrow 24 \text{ m}^2 + 6 \text{ m} \cdot x + 4 \text{ m} \cdot x + x^2 = 48 \text{ m}^2 \quad -48 \text{ m}^2$</p> <p>$\Leftrightarrow x^2 + 10 \text{ m} \cdot x - 24 \text{ m}^2 = 0$</p> <p>$p = 10 \text{ m}; q = -24 \text{ m}^2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{10 \text{ m}}{2}\right)^2 - (-24 \text{ m}^2) = 49 \text{ m}^2$</p> <p>$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -5 \text{ m} \pm \sqrt{49 \text{ m}^2}$</p> <p>$\Rightarrow x_1 = -5 \text{ m} + 7 \text{ m} = \underline{\underline{2 \text{ m}}}$ oder $x_2 = -5 \text{ m} - 7 \text{ m} = \underline{\underline{-12 \text{ m}}}$</p> <p>Nur die erste Lösung macht Sinn, da es keine negative Länge gibt.</p> <p>Antwort: Beide Seiten des Rechtecks müssen um 2 m verlängert werden, damit sich die Fläche verdoppelt.</p>	

E7	Aufgabe
Ein Spielzimmer hat die Grundfläche von 52 m^2 . Der Raum ist um $1,50 \text{ m}$ länger als breit. Bestimmen Sie die Maße.	

E7	Ergebnis
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 10px;"> $x + 1,5 \text{ m}$ x $A = 52 \text{ m}^2$ </div> <div> <p>Fläche: $x(x + 1,5 \text{ m}) = 52 \text{ m}^2$</p> <p>$\Leftrightarrow x^2 + 1,5 \text{ m} \cdot x = 52 \text{ m}^2 \quad - 52 \text{ m}^2$</p> <p>$\Leftrightarrow x^2 + 1,5 \text{ m} \cdot x - 52 \text{ m}^2 = 0$</p> </div> </div>	
<p>$p = 1,5 \text{ m}; q = -52 \text{ m}^2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{1,5 \text{ m}}{2}\right)^2 - (-52 \text{ m}^2) = 52,5625 \text{ m}^2$</p> <p>$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -0,75 \text{ m} \pm \sqrt{52,5625 \text{ m}^2}$</p> <p>$x_1 = 6,5 \text{ m}$ oder $x_2 = -8 \text{ m}$ (Es gibt keine negative Länge)</p> <p><u>Breite: $6,5 \text{ m}$</u> <u>Länge: $6,5 \text{ m} + 1,5 \text{ m} = 8 \text{ m}$</u></p> <p>Das Spielzimmer ist 8 m lang und $6,5 \text{ m}$ breit.</p>	

E8	Aufgabe
Norma hat ein Rechteck gezeichnet. Der Umfang beträgt 40 cm , der Flächeninhalt beträgt 96 cm^2 . Berechnen Sie Länge und Breite.	

E8	Ergebnis
<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-right: 10px;"> b a $A = 96 \text{ cm}^2$ </div> <div> <p>Rechteckfläche: $a \cdot b = 96 \text{ cm}^2$</p> <p>Rechteckumfang: $2a + 2b = 40 \text{ cm}$</p> <p>Das sind zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Lösung durch Substitution:</p> </div> </div>	
<p>I $a \cdot b = 96 \text{ cm}^2$ Gleichung II nach a auflösen</p> <p>II $2a + 2b = 40 \text{ cm}$ und in I einsetzen</p> <p>$2a + 2b = 40 \text{ cm} \Rightarrow a = 20 \text{ cm} - b$</p> <p>In I eingesetzt: $(20 \text{ cm} - b) \cdot b = 96 \text{ cm}^2$</p> <p>$\Rightarrow$ quadratische Gleichung: $b^2 - 20 \text{ cm} \cdot b + 96 \text{ cm}^2 = 0$</p> <p>$p = -20 \text{ cm} \quad q = 96 \text{ cm}^2 \Rightarrow D = 4 \text{ cm}^2$</p> <p>$b_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} = 10 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$</p> <p>$b_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} = 10 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$</p> <p>$b_1 = 12 \text{ cm} \Rightarrow a = \frac{96 \text{ cm}^2}{12 \text{ cm}} = 8 \text{ cm}$</p> <p>Das Rechteck hat eine Länge von 12 cm und eine Breite von 8 cm.</p>	

E9	Aufgabe
	Zeigen Sie: Vermehrt man das Quadrat der Differenz zweier reeller Zahlen um ihr vierfaches Produkt, so erhält man das Quadrat der Summe der beiden Zahlen.

E9	Ergebnis
	$(a - b)^2 + 4ab = (a + b)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

E10	Aufgabe
	Entlang einer Mauer soll ein rechteckiges Feld der Fläche $A = 800 \text{ m}^2$ mit einem insgesamt 100 m langen Zaun eingezäunt werden. Wie sind die Seitenlängen zu wählen? Welche maximale Fläche könnte mit 100 m Zaun begrenzt werden?

E10	Ergebnis												
	$a \cdot b = 800$ und $2a + b = 100 \Rightarrow b \left(-\frac{b}{2} + 50 \right) = 800 \Rightarrow b = 80 \text{ m} \quad a = 10 \text{ m}$ $A = b \left(-\frac{b}{2} + 50 \right)$ Wertetabelle: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>b</td> <td>80</td> <td>70</td> <td>60</td> <td>50</td> <td>40</td> </tr> <tr> <td>A</td> <td>800</td> <td>1050</td> <td>1200</td> <td>1250</td> <td>1200</td> </tr> </table>	b	80	70	60	50	40	A	800	1050	1200	1250	1200
b	80	70	60	50	40								
A	800	1050	1200	1250	1200								
	Die maximale Fläche entsteht für $a = 25 \text{ m}$ und $b = 50 \text{ m} \Rightarrow A = \underline{\underline{1250 \text{ m}^2}}$												