Lösungen Potenzen IX

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\left(x^7 + x^5\right)x^8 = x^{15} + x^{13}$
	b)	$4ab^2\left(2a^2b^3 + 5ab^5 - 3a^2b\right) = 8a^3b^5 + 20a^2b^7 - 12a^3b^3$
	c)	$\left(a^3 + a^5\right)a^{n+3} = a^{n+6} + a^{n+8}$
	d)	$3x^2y^3\left(5xy - 3x^2y^4 + 2x^3y^4\right) = 15x^3y^4 - 9x^4y^7 + 6x^5y^7$
	e)	$\left(4x^2 - 5x^3 + 2x^5\right)\cdot 3x^2 = 12x^4 - 15x^5 + 6x^7$
	f)	$\left(2a^5 - 3b^2\right)\left(4a^3 + 2b\right) = 8a^8 - 12a^3b^2 + 4a^5b - 6b^3$
	g)	$2y^4\left(3y^5 - 7y^6\right) = 6y^9 - 14y^{10}$
	h)	$\left(x - y\right)\left(x^2 + xy + y^2\right) = x^3 - y^3$

E2	Ergebnis
	$5^{-4} \quad < \quad 5^{-3} \quad < \quad 0{,}25^3 \quad < \quad 3^{-3}$

E3	Ergebnis
	$\left(a^2\right)^n = a^{2n} = a^{n+1}\cdot a^{n-1} \quad ; \quad \left(-a^2\right)^n = a^{2n}$ für n gerade $a\cdot a^n = a^{n+1} \quad ; \quad a^{n-1} = \frac{1}{a^{1-n}} \quad ; \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad ; \quad \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \quad ; \quad a^0 = 1$

E4	Ergebnisse			
	a)	falsch wegen 0^{-2} nicht definiert.	b)	wahr, da $a > 0$

E5	Ergebnisse			
	a)	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = b^n a^{-n}$	b)	definiert für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$.

E6	Ergebnis
	$q = 1 + \frac{3{,}5}{100} = 1{,}035 \quad K = K_0 \cdot q^{18} = 2000\text{ €} \cdot 1{,}035^{18} = 3714{,}98\text{ €}$

E7	Ergebnis
	$q = \frac{75}{100} = 0{,}75 \quad h = h_0 \cdot q^6 = 4{,}5\text{ m} \cdot 0{,}75^6 \approx 0{,}801\text{ m} \approx 0{,}8\text{ m}$

E8	Ergebnis
	$a^n > 0$, wenn n gerade $\wedge n \in \mathbb{N} \wedge a \neq 0$ wahre Aussage $a^n < 0$, wenn n ungerade $\wedge n \in \mathbb{N} \wedge a \neq 0$ falsche Aussage, z.B. $3^7 > 0$

E9	Ergebnis
	$q = 1 - \frac{4}{100} = 0{,}96 \quad N = N_0 \cdot q^{10} = 1 \cdot 0{,}96^{10} \approx 0{,}665$ In 10 Jahren geht der heutige Bestand auf etwa 66,5%, also ungefähr zwei Drittel zurück. Die beiden Aussagen decken sich.

Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Ausführliche Lösungen :

A1	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\left(x^7+x^5\right)x^8=x^7\cdot x^8+x^5\cdot x^8$ $=x^{7+8}+x^{5+8}$ $=\underline{\underline{x^{15}+x^{13}}}$	b)	$4ab^2\left(2a^2b^3+5ab^5-3a^2b\right)$ $=4ab^2\cdot 2a^2b^3+4ab^2\cdot 5ab^5-4ab^2\cdot 3a^2b$ $=\underline{\underline{8a^3b^5+20a^2b^7-12a^3b^3}}$

A1	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\left(a^3+a^5\right)a^{n+3}=a^3\cdot a^{n+3}+a^5\cdot a^{n+3}$ $=a^{3+n+3}+a^{5+n+3}$ $=\underline{\underline{a^{n+6}+a^{n+8}}}$	d)	$3x^2y^3\left(5xy-3x^2y^4+2x^3y^4\right)$ $=3x^2y^3\cdot 5xy-3x^2y^3\cdot 3x^2y^4+3x^2y^3\cdot 2x^3y^4$ $=\underline{\underline{15x^3y^4-9x^4y^7+6x^5y^7}}$

A1	Ausführliche Lösungen			
	e)	$\left(4x^2-5x^3+2x^5\right)\cdot 3x^2$ $=4x^2\cdot 3x^2-5x^3\cdot 3x^2+2x^5\cdot 3x^2$ $=\underline{\underline{12x^4-15x^5+6x^7}}$	f)	$\left(2a^5-3b^2\right)\left(4a^3+2b\right)$ $=2a^5\cdot 4a^3+2a^5\cdot 2b-3b^2\cdot 4a^3-3b^2\cdot 2b$ $=\underline{\underline{8a^8+4a^5b-12a^3b^2-6b^3}}$

A1	Ausführliche Lösungen			
	g)	$2y^4\left(3y^5-7y^6\right)$ $=2y^4\cdot 3y^5-2y^4\cdot 7y^6$ $=\underline{\underline{6y^9-14y^{10}}}$	h)	$\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$ $=x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2-y^3$ $=x^3+\cancel{x^2y}+\cancel{xy^2}-\cancel{x^2y}-\cancel{xy^2}-y^3$ $=\underline{\underline{x^3-y^3}}$

A2	Ausführliche Lösung
	$0{,}25^3=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4^3};5^{-3}=\frac{1}{5^3};5^{-4}=\frac{1}{5^4};3^{-3}=\frac{1}{3^3}$ $\frac{1}{5^4}<\frac{1}{5^3}<\frac{1}{4^3}<\frac{1}{3^3}$ $\underline{\underline{5^{-4}<5^{-3}<0{,}25^3<3^{-3}}}$

A3	Ausführliche Lösung

Vorgabe:

$$\left(a^2\right)^n \;;\; a\cdot a^n \;;\; a^{n-1} \;;\; a^{n-1}\cdot a^{n+1} \;;\; \frac{1}{a^n} \;;\; \frac{a^n}{a^k} \;;\; \left(-a^2\right)^n \;;\; \frac{a^k}{a^n} \;;\; a^0$$

$$a^{2n} \;;\; a^{n+1} \;;\; a^{n-k} \;;\; \frac{1}{a^{1-n}} \;;\; a^{-n} \;;\; 1$$

Umformungen:

$$\left(a^2\right)^n = a^{2n}\,;\, a\cdot a^n = a^{n+1}\,;\, a^{n-1}\cdot a^{n+1} = a^{2n}\,;\, \frac{1}{a^n} = a^{-n}\,;\, \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$$

$\left(-a^2\right)^n = a^{2n}$ falls n gerade ; $\left(-a^2\right)^n = -a^{2n}$ falls n ungerade

$$\frac{a^k}{a^n} = a^{k-n}\,;\, a^0 = 1\,;\, \frac{1}{a^{1-n}} = a^{n-1}$$

Übereinstimmungen:

$\left(a^2\right)^n = a^{2n} = a^{n+1}\cdot a^{n-1}$; $\left(-a^2\right)^n = a^{2n}$ für n gerade

$$a\cdot a^n = a^{n+1} \;;\; a^{n-1} = \frac{1}{a^{1-n}} \;;\; \frac{1}{a^n} = a^{-n} \;;\; \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \;;\; a^0 = 1$$

A4	Ausführliche Lösung

a) Die Aussage a^k ist definiert für $a \in \mathbb{R}$ unf für $k \in \mathbb{Z}$
ist **falsch**, da z.B. 0^{-2} nicht definiert ist, denn lt. Potenzgesetz ist $0^{-2} = 1/0^2$.
Da man aber durch Null nicht teilen darf, ist somit 0^{-2} nicht definiert.
Um eine Aussage zu wiederlegen reicht es aus, ein Gegenbeispiel zu finden.

A4	Ausführliche Lösung

b) Die Aussage a^k ist definiert für $a \in \mathbb{R}_+^*$ und für $k \in \mathbb{Z}$ $\left(\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x > 0\}_{\mathbb{R}}\right)$
ist wahr, denn die Basis a ist größer Null und damit ist auch jeder Potenzwert a^k größer Null.

A5	Ausführliche Lösung

a) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \underline{\underline{a^{-n}b^n}}$ wegen $a^{-1} = \frac{1}{a}$

A5	Ausführliche Lösung

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = a^{-n}b^n = \frac{b^n}{a^n} \Rightarrow a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$

also definiert für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$.

A6	Ausführliche Lösung
	Es handelt sich hier um eine Zinseszinsrechnung, für die gilt: $K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $q = \left(1+\frac{p}{100}\right)$ mit K_n : Kapital nach n Jahren (Endbetrag) K_0 : Anfangskapital (Grundbetrag oder auch Barwert genannt) q : Zinsfuß und p als Zinsfaktor, sowie mit n als Laufzeit $K_0 = 2000\,€$; $p = 3{,}5\%$ und $n = 18$ $K_{18} = 2000 \cdot \left(1+\frac{3{,}5}{100}\right)^{18} = 2000 \cdot 1{,}035^{18} = \underline{\underline{3714{,}98}}$ An ihrem 18. Geburtstag kann die Tochter 3714,98 € erwarten.

A7	Ausführliche Lösung
	Ausgangshöhe h_0 = 4,5 m. Die Höhe nach dem 1. Bodenkontakt ist nur noch 75% der Ausgangshöhe. $h_1 = h_0 \cdot 0{,}75$ Die Höhe nach dem 2. Bodenkontakt ist nur noch 75% von h_1. $h_2 = h_1 \cdot 0{,}75 = h_0 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 = h_0 \cdot 0{,}75^2$. Die Höhe nach dem 6. Bodenkontakt ist demnach $h_6 = h_0 \cdot 0{,}75^6 = 4{,}5\,m \cdot 0{,}75^6 \approx \underline{\underline{0{,}801m}}$ Nach dem 6. Bodenkontakt springt der Ball noch etwa 0,8 m hoch.

A8	Ausführliche Lösung
	$a^n > 0,$ wenn n gerade $\wedge\, n \in \mathbb{N} \wedge a \neq 0$ ist eine wahre Aussage Falls a > 0 ist, ist auch a^n > 0. $a^n < 0,$ wenn n ungerade $\wedge\, n \in \mathbb{N} \wedge a \neq 0$ falsche Aussage, z.B. $3^7 > 0$. Um eine Aussage zu wiederlegen, reicht es in vielen Fällen aus, mindestens ein Gegenbeispiel zu finden.

E9	Ausführliche Lösung
	Ein Rückgang der Population um 4% pro Jahr bedeutet: $N_1 = N_0\left(1-\frac{4}{100}\right) = N_0 \cdot 0{,}96$ nach dem 1. Jahr $N_2 = N_1 \cdot 0{,}96 = N_0 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}96 = N_0 \cdot 0{,}96^2$ nach dem 2. Jahr $N_{10} = N_0 \cdot 0{,}96^{10}$ nach dem 10. Jahr $N_{10} = N_0 \cdot 0{,}96^{10} \Rightarrow \frac{N_{10}}{N_0} = \frac{N_0 \cdot 0{,}96^{10}}{N_0} = 0{,}96^{10} \approx \underline{\underline{0{,}665}}$ In 10 Jahren geht der heutige Bestand auf etwa 66,5%, also ungefähr zwei Drittel zurück. Die beiden Aussagen decken sich.