Lösungen Potenzen VIII (Potenzen mit e^x)

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{4}\cdot 2^{-4}\cdot\left(2^2\right)^3=1$
	b)	$\left(e^x+e^{-x}\right)^2=e^{2x}+e^{-2x}+2$
	c)	$\left(e^x-e^{-x}+5\right)e^x=e^{2x}+5e^x-1$

E2	Ergebnisse			
	a)	$2^x\left(2^{-1}+2^x\right)=2^{x-1}+2^{2x}$	b)	$\left(x^4+x^{-2}\right)\left(x^3-x^{-3}\right)=x^7-x^{-5}$
	c)	$\left(a^2-a^{-2}\right)^2=a^4+a^{-4}-2$	d)	$\left(x^{-2}-3x\right)\left(x^{-2}+3x\right)=x^{-4}-9x^2$
	e)	$\left(2^{-x}+2^x\right)\left(2^{-x}-2^x\right)=2^{-2x}-2^{2x}$	f)	$\left(3x^n+6x^{n+1}+2x^{n-2}\right)x^{-n}=3+6x+2x^{-2}$

E3	Ergebnisse			
	a)	$a^2\cdot\left(a^2\right)^{-2}+3a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^3=4a^{-2}$	b)	$\frac{1}{18}\cdot\left(3^2\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 3^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=6$
	c)	$\left(x^2\cdot x^{-3}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{x^2}\right)^{-1}=\frac{4}{3}x^2$	d)	$a^5\cdot a^{-2}+4a^2\cdot a=5a^3$
	e)	$a^4\cdot a^{-6}-3a^3\cdot a^{-5}+a^2=-2a^{-2}+a^2$	f)	$\left(\frac{2}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=\frac{9}{x^3}$

E4	Ergebnisse			
	a)	$\frac{-2^3-2\cdot 4}{2\cdot 2^3}=-1$	b)	$\frac{(1-x)^2}{x-1}=x-1$
	c)	$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}=e^{4x-1}$	d)	$\frac{1}{e^{2x}}+3\left(e^{-x}\right)^2-\left(\frac{2}{e^x}\right)^2=0$
	e)	$e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3}=\frac{1}{e}$	f)	$4k^2\cdot k^{-3}-k\cdot k^{-2}=\frac{3}{k}$

E5	Ergebnisse	
	a)	$6x^3 \cdot x^{-1} - 8x^4 \cdot x^{-2} = -2x^2$
	b)	$\left(a^{n+2} - 4a^n - 2a^{2-n}\right) \cdot \frac{a^{-2}}{2} = \frac{1}{2}a^n - 2a^{n-2} - a^{-n}$
	c)	$4x^{-4}x^7 - 0{,}5x^4x^{-1} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^{1{,}5} = 3{,}5x^3 + x^{-3}$
	d)	$\frac{a^{n+1}}{a} + \frac{a^{2n-1}}{a^{n+2}} + \left(a^{n-1}\right)^2 \cdot a^{2-n} = 2a^n + a^{n-3}$
	e)	$\left(k^7 - k^4\right) \cdot k^{-3} = k^4 - k$
	f)	$\left(\frac{x-y}{a-b}\right)^5 \cdot \left(\frac{x-y}{5}\right)^{-2} \cdot \frac{(a-b)^2}{x^2 - y^2} = \frac{25(x-y)^2}{(x+y)(a-b)^3}$

E6	Ergebnisse			
	a)	$5 \cdot 2^{n+1} - 2^n + 8 \cdot 2^{n-2} - 12 \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^n$	b)	$\frac{2^{2k}}{8} \cdot 2^{3-k} + 2 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$
	c)	$\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}} = e^x + e^{-x}$	d)	$\frac{1{,}5e^{3x} - e^x}{1{,}5e^{3x}} = 1 - \frac{2}{3}e^{-2x}$

E7	Ergebnisse	
	a)	$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$; $\frac{3^{-2}}{5}$; $\frac{3}{5^{-2}} \Rightarrow \frac{25}{9}$; $\frac{1}{45}$; 75
	b)	$\left(-3^2\right)^{-1}$; $-\left(3^2\right)^{-1}$; $\left[(-3)^2\right]^{-1} \Rightarrow -\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{9}$; $\frac{1}{9}$

Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Ausführliche Lösungen :

A1	**Aufgabe**					
	Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie					
	a)	$\frac{1}{4}\cdot 2^{-4}\cdot\left(2^2\right)^3$	b)	$\left(e^x+e^{-x}\right)^2$	c)	$\left(e^x-e^{-x}+5\right)e^x$

A1 Ausführliche Lösung

a)
$$\frac{1}{4}\cdot 2^{-4}\cdot\left(2^2\right)^3=\frac{1}{4}\cdot 2^{-4}\cdot 2^6=\frac{1}{2^2}\cdot 2^{-4}\cdot 2^6$$
$$=2^{-2}\cdot 2^{-4}\cdot 2^6=2^{-2-4+6}=2^0=\underline{\underline{1}}$$

A1 Ausführliche Lösung

b)
$$\underbrace{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}_{\text{1. bin. Formel}}=\left(e^x\right)^2+2\cdot e^x\cdot e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^2=e^{2x}+2e^{x-x}+e^{-2x}$$
$$=e^{2x}+2e^0+e^{-2x}=\underline{\underline{e^{2x}+e^{-2x}+2}}$$

A1 Ausführliche Lösung

c)
$$\left(e^x-e^{-x}+5\right)e^x=e^x\cdot e^x-e^{-x}\cdot e^x+5\cdot e^x=e^{x+x}-e^{x-x}+5e^x$$
$$=e^{2x}-1+5e^x=\underline{\underline{e^{2x}+5e^x-1}}$$

A2	**Aufgabe**			
	Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie			
	a) $2^x\left(2^{-1}+2^x\right)$		b) $\left(x^4+x^{-2}\right)\left(x^3-x^{-3}\right)$	
	c) $\left(a^2-a^{-2}\right)^2$		d) $\left(x^{-2}-3x\right)\left(x^{-2}+3x\right)$	
	e) $\left(2^{-x}+2^x\right)\left(2^{-x}-2^x\right)$		f) $\left(3x^n+6x^{n+1}+2x^{n-2}\right)x^{-n}$	

A2 Ausführliche Lösungen

a)
$$2^x\left(2^{-1}+2^x\right)=2^x\cdot 2^{-1}+2^x\cdot 2^x$$
$$=2^{x-1}+2^{x+x}$$
$$=\underline{\underline{2^{x-1}+2^{2x}}}$$

b)
$$\left(x^4+x^{-2}\right)\left(x^3-x^{-3}\right)$$
$$=x^4\cdot x^3-x^4\cdot x^{-3}+x^{-2}\cdot x^3-x^{-2}\cdot x^{-3}$$
$$=x^7-x^1+x^1-x^5$$
$$=\underline{\underline{x^7-x^{-5}}}$$

A2 Ausführliche Lösungen

c)
$$\underbrace{\left(a^2-a^{-2}\right)^2}_{\text{2. bin. Formel}}=\left(a^2\right)^2-2a^2\cdot a^{-2}+\left(a^{-2}\right)^2$$
$$=a^4-2a^0+a^{-4}$$
$$=\underline{\underline{a^4+a^{-4}-2}}$$

d)
$$\underbrace{\left(x^{-2}-3x\right)\left(x^{-2}+3x\right)}_{\text{3. bin. Formel}}=\left(x^{-2}\right)^2-(3x)^2$$
$$=x^{-2\cdot 2}-3^2x^2$$
$$=\underline{\underline{x^{-4}-9x^2}}$$

A2	Ausführliche Lösungen		
	e) $\underbrace{\left(2^{-x}+2^{x}\right)\left(2^{-x}-2^{x}\right)}_{\text{3. bin. Formel}}=\left(2^{-x}\right)^2-\left(2^{x}\right)^2$ $=2^{-x\cdot 2}-2^{x\cdot 2}$ $=\underline{\underline{2^{-2x}-2^{2x}}}$	f)	$\left(3x^n+6x^{n+1}+2x^{n-2}\right)x^{-n}$ $=3x^n\cdot x^{-n}+6x^{n+1}\cdot x^{-n}+2x^{n-2}\cdot x^{-n}$ $=3^0+6x^1+2x^{-2}$ $=\underline{\underline{3+6x+2x^{-2}}}$

A3	**Aufgabe**		
	Vereinfachen Sie und fassen Sie zusammen		
	a) $a^2\cdot\left(a^2\right)^{-2}+3a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^3$	b) $\frac{1}{18}\cdot\left(3^2\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 3^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$	c) $\left(x^2\cdot x^{-3}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{x^2}\right)^{-1}$
	d) $a^5\cdot a^{-2}+4a^2\cdot a$	e) $a^4\cdot a^{-6}-3a^3\cdot a^{-5}+a^2$	f) $\left(\frac{2}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3$

A3	Ausführliche Lösungen		
	a) $a^2\cdot\left(a^2\right)^{-2}+3a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^3=a^2\cdot a^{-4}+3a\cdot\frac{1^3}{a^3}$ $=a^{-2}+3a\cdot a^{-3}$ $=a^{-2}+3a^{-2}$ $=\underline{\underline{4a^{-2}=\frac{4}{a^2}}}$	b)	$\frac{1}{18}\cdot\left(3^2\right)^2+\frac{1}{2}\cdot 3^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$ $=\frac{1}{2\cdot 3^2}\cdot 3^4+\frac{1}{2}\cdot 3^3\cdot\frac{1^2}{3^2}$ $=\frac{1}{2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4+\frac{1}{2}\cdot 3^3\cdot 3^{-2}$ $=\frac{1}{2}\cdot 3^2+\frac{1}{2}\cdot 3$ $=\frac{1}{2}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 3=\underline{\underline{6}}$

A3	Ausführliche Lösungen		
	c) $\left(x^2\cdot x^{-3}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{x^2}\right)^{-1}=\left(x^{-1}\right)^{-2}+\frac{3^{-1}}{x^{-2}}$ $=x^2+\frac{x^2}{3}$ $=\underline{\underline{\frac{4}{3}x^2}}$	d)	$a^5\cdot a^{-2}+4a^2\cdot a=a^{5-2}+4a^{2+1}$ $=a^3+4a^3$ $=\underline{\underline{5a^3}}$

A3	Ausführliche Lösungen		
	e) $a^4\cdot a^{-6}-3a^3\cdot a^{-5}+a^2=a^{4-6}-3a^{3-5}+a^2$ $=a^{-2}-3a^{-2}+a^2$ $=\underline{\underline{-2a^{-2}+a^2}}$	f)	$\left(\frac{2}{x}\right)^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=\frac{2^3}{x^3}+\frac{1^3}{x^3}$ $=\frac{2^3+1^3}{x^3}$ $=\underline{\underline{\frac{9}{x^3}}}$

A4	**Aufgabe**					
	Vereinfachen Sie und fassen Sie zusammen					
	a)	$\dfrac{-2^3-2\cdot 4}{2\cdot 2^3}$	b)	$\dfrac{(1-x)^2}{x-1}$	c)	$\dfrac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$
	d)	$\dfrac{1}{e^{2x}}+3\left(e^{-x}\right)^2-\left(\dfrac{2}{e^x}\right)^2$	e)	$e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3}$	f)	$4k^2\cdot k^{-3}-k\cdot k^{-2}$

A4	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\dfrac{-2^3-2\cdot 4}{2\cdot 2^3}=\dfrac{-2^3-2\cdot 2^2}{2\cdot 2^3}=\dfrac{-2^3-2^3}{2^4}=\dfrac{-2\cdot 2^3}{2^4}=\underline{\underline{-1}}$	b)	$\dfrac{(1-x)^2}{x-1}=\dfrac{(1-x)(1-x)}{(-1)(1-x)}=\dfrac{(1-x)\,\cancel{(1-x)}}{(-1)\,\cancel{(1-x)}}=-(1-x)=\underline{\underline{x-1}}$

A4	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\dfrac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}=e^{3x+1-(-x+2)}=e^{3x+1+x-2}=\underline{\underline{e^{4x-1}}}$	d)	$\dfrac{1}{e^{2x}}+3\left(e^{-x}\right)^2-\left(\dfrac{2}{e^x}\right)^2=e^{-2x}+3\cdot e^{-2x}-\dfrac{2^2}{e^{2x}}=e^{-2x}+3\cdot e^{-2x}-4\cdot e^{-2x}=4\cdot e^{-2x}-4\cdot e^{-2x}=\underline{\underline{0}}$

A4	Ausführliche Lösungen			
	e)	$e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3}=e^{-x-x+2+2x-3}=e^{-1}=\underline{\underline{\dfrac{1}{e}}}$	f)	$4k^2\cdot k^{-3}-k\cdot k^{-2}=4k^{2-3}-k^{1-2}=4k^{-1}-k^{-1}=\underline{\underline{3k^{-1}=\dfrac{3}{k}}}$

A5	**Aufgabe**			
	Vereinfachen Sie und fassen Sie zusammen			
	a)	$6x^3\cdot x^{-1}-8x^4\cdot x^{-2}$	b)	$\left(a^{n+2}-4a^n-2a^{2-n}\right)\cdot\dfrac{a^{-2}}{2}$
	c)	$4x^{-4}x^7-0{,}5x^4x^{-1}+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{1{,}5}$	d)	$\dfrac{a^{n+1}}{a}+\dfrac{a^{2n-1}}{a^{n+2}}+\left(a^{n-1}\right)^2\cdot a^{2-n}$
	e)	$\left(k^7-k^4\right)\cdot k^{-3}$	f)	$\left(\dfrac{x-y}{a-b}\right)^5\cdot\left(\dfrac{x-y}{5}\right)^{-2}\cdot\dfrac{(a-b)^2}{x^2-y^2}$

A5 Ausführliche Lösung

a) $6x^3 \cdot x^{-1} - 8x^4 \cdot x^{-2} = 6x^{3-1} - 8x^{4-2} = 6x^2 - 8x^2 = \underline{\underline{-2x^2}}$

A5 Ausführliche Lösung

b) $\left(a^{n+2} - 4a^n - 2a^{2-n}\right) \cdot \frac{a^{-2}}{2} = \frac{1}{2}a^{n+2-2} - \frac{1}{2} \cdot 4a^{n-2} - \frac{1}{2} \cdot 2a^{2-n-2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}a^n - 2a^{n-2} - a^{-n}}}$

A5 Ausführliche Lösung

c)
$$4x^{-4}x^7 - 0,5x^4x^{-1} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^{1,5} = 4x^{-4+7} - 0,5x^{4-1} + \frac{1^{1,5}}{x^{2 \cdot 1,5}}$$
$$= 4x^3 - 05x^3 + \frac{1}{x^3} = \underline{\underline{3,5x^3 + x^{-3}}}$$

A5 Ausführliche Lösung

d)
$$\frac{a^{n+1}}{a} + \frac{a^{2n-1}}{a^{n+2}} + \left(a^{n-1}\right)^2 \cdot a^{2-n} = a^{n+1} \cdot a^{-1} + a^{2n-1} \cdot a^{-(n+2)} + a^{2n-2} \cdot a^{2-n}$$
$$= a^{n+1-1} + a^{2n-1-n-2} + a^{2n-2+2-n}$$
$$= a^n + a^{n-3} + a^n$$
$$= \underline{\underline{2a^n + a^{n-3}}}$$

A5 Ausführliche Lösung

e)
$$\left(k^7 - k^4\right) \cdot k^{-3} = k^7 \cdot k^{-3} - k^4 \cdot k^{-3}$$
$$= k^{7-3} - k^{4-3}$$
$$= \underline{\underline{k^4 - k}}$$

A5 Ausführliche Lösung

f)
$$\left(\frac{x-y}{a-b}\right)^5 \cdot \left(\frac{x-y}{5}\right)^{-2} \cdot \frac{(a-b)^2}{x^2-y^2} = \left(\frac{x-y}{a-b}\right)^5 \cdot \frac{5^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{(a-b)^2}{(x-y)(x+y)}$$
$$= \frac{5^2 (a-b)^2 (x-y)^5}{(a-b)^5 (x-y)^3 (x+y)}$$
$$= \underline{\underline{\frac{25(x-y)^2}{(x+y)(a-b)^3}}}$$

A6	**Aufgabe**			
	Vereinfachen Sie und fassen Sie zusammen			
	a)	$5\cdot 2^{n+1}-2^{n}+8\cdot 2^{n-2}-12\cdot 2^{n-1}$	b)	$\frac{2^{2k}}{8}\cdot 2^{3-k}+2\cdot 2^{k-1}$
	c)	$\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}-e^{-x}}$	d)	$\frac{1{,}5e^{3x}-e^{x}}{1{,}5e^{3x}}$

A6 Ausführliche Lösung

a)

$$\begin{aligned}5\cdot 2^{n+1}-2^{n}+8\cdot 2^{n-2}-12\cdot 2^{n-1} &= 5\cdot 2^{n+1}-2^{n}+2^{3}\cdot 2^{n-2}-3\cdot 2^{2}\cdot 2^{n-1}\\ &= 5\cdot 2^{n+1}-2^{n}+2^{n-2+3}-3\cdot 2^{n-1+2}\\ &= 5\cdot 2^{n+1}-2^{n}+2^{n+1}-3\cdot 2^{n+1}\\ &= 5\cdot 2\cdot 2^{n}-2^{n}+2\cdot 2^{n}-3\cdot 2\cdot 2^{n}\\ &= 10\cdot 2^{n}-2^{n}+2\cdot 2^{n}-6\cdot 2^{n}\\ &= \underline{\underline{5\cdot 2^{n}}}\end{aligned}$$

A6 Ausführliche Lösung

b)

$$\begin{aligned}\frac{2^{2k}}{8}\cdot 2^{3-k}+2\cdot 2^{k-1} &= \frac{2^{2k}}{2^{3}}\cdot 2^{3-k}+2^{1}\cdot 2^{k-1}\\ &= 2^{2k}\cdot 2^{-3}\cdot 2^{3-k}+2^{1}\cdot 2^{k-1}\\ &= 2^{2k-3+3-k}+2^{k-1+1}\\ &= 2^{k}+2^{k}=2\cdot 2^{k}\\ &= \underline{\underline{2^{k+1}}}\end{aligned}$$

A6 Ausführliche Lösung

c)

$$\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}-e^{-x}}=\frac{\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{e^{x}-e^{-x}}=\frac{\cancel{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}\left(e^{x}+e^{-x}\right)}{\cancel{\left(e^{x}-e^{-x}\right)}}=\underline{\underline{e^{x}+e^{-x}}}$$

A6 Ausführliche Lösung

d)

$$\frac{1{,}5e^{3x}-e^{x}}{1{,}5e^{3x}}=\frac{1{,}5e^{3x}}{1{,}5e^{3x}}-\frac{e^{x}}{1{,}5e^{3x}}=1-\frac{e^{x}}{\frac{3}{2}e^{3x}}=1-\frac{2}{3}e^{x}\cdot e^{-3x}=\underline{\underline{1-\frac{2}{3}e^{-2x}}}$$

A7	**Aufgabe**	
	Berechnen Sie	
	a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$; $\frac{3^{-2}}{5}$; $\frac{3}{5^{-2}}$	b) $\left(-3^2\right)^{-1}$; $-\left(3^2\right)^{-1}$; $\left[\left(-3\right)^2\right]^{-1}$

A7	Ausführliche Lösungen	
	a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{25}{9}}}$ $\frac{3^{-2}}{5} = \frac{1}{5\cdot 3^2} = \underline{\underline{\frac{1}{45}}}$ $\frac{3}{5^{-2}} = 3\cdot 5^2 = \underline{\underline{75}}$	b) $\left(-3^2\right)^{-1} = \frac{1}{-3^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$ $-\left(3^2\right)^{-1} = -3^{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$ $\left[\left(-3\right)^2\right]^{-1} = \left[3^2\right]^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$