Lösungen Potenzen I

Ergebnisse:

E1.	Ergebnisse
	$(-3)^2 = 9$; $(-3)^3 = -27$; $(-3)^4 = 81$; $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$;
	$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$; $-3^3 = -27$; $-3^2 = -9$; $-(-3)^3 = 27$

E2	Ergebnisse			
	a)	$3x^4 - x^4 - x^3(x+2) = x^4 - 2x^3$	b)	$-12a^2 + 3a(a+1) = -9a^2 + 3a$
	c)	$ax^n + 4x^n = (a+4)x^n$	d)	$(1-u)^2 - \frac{1}{2}(1-u)^2 = \frac{1}{2}(1-u)^2$
	e)	$a(x+u)^k - b(x+u)^k = (a-b)(x+u)^k$	f)	$ux^3 - 3x^2 + 2ux^3 - 4x^2 = 3ux^3 - 7x^2$

E3	Ergebnisse	
	a)	$3a^k \cdot a^{k-1} \cdot a = 3a^{2k}$
	b)	$\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^6$
	c)	$u^3 \cdot u^4 - u^5 \cdot (u^2+1) = -u^5$
	d)	$x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = x^9$
	e)	$a \cdot b^k \cdot a^{2n} \cdot b^{k-3} = a^{2n+1} \cdot b^{2k-3}$
	f)	$u^2 \cdot x^2 \cdot u^n \cdot x^{n-1} = u^{n+2} \cdot x^{n+1}$
	g)	$b^n \cdot b^{2n+1} = b^{3n+1}$
	h)	$(x-2)^n \cdot (x-2)^{1-n} = x-2$
	i)	$(x+1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n+1} = (x+1)^{2n}$

E4	Ergebnisse					
	a)	$0{,}3^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6 = 1$	b)	$2^x \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x \cdot 5 = 5^{x+1}$	c)	$2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2$
	d)	$\left(\frac{x}{4}\right)^4 \cdot 4^6 = 16x^4$	e)	$(x-3)^n \cdot (x+3)^n = (x^2-9)^n$	f)	$2^n \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot x = x^{n+1}$
	g)	$9 \cdot 3^{n+1} = 3^{n+3}$	h)	$(a-b)^9 \cdot (a-b) = (a-b)^{10}$	i)	$\left(\frac{a-b}{c}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{c}{b-a}\right)^{2k} = 1$

E5	Ergebnisse	
	a)	$2(a-b)^n$ für n gerade; 0 für n ungerade
	b)	$(2x-4)^n$ für n gerade; $(x-2)^n \cdot (2+2^n)$ für n ungerade

E6	Ergebnis
	Die Behauptung ist falsch, z.B. $a = 1;\ b = 1;\ 1+1 \neq (1+1)^2$ Eine wahre Aussage erhält man für $a = 0 \vee b = 0$

E7	Ergebnis
	Bedingung: $a = -b$ oder $b = -a$, denn $\underbrace{(-b)^3}_{-b^3} + b^3 = (-b+b)^3 = 0^3$

E8	Ergebnis
	$a^2 + b^2 = c^2$ für $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ $\quad 3^2 + 4^2 = 5^2$

E9	Ergebnis
	$n = 17 \quad q = 1 + \frac{1{,}5}{100} = 1{,}015$ $Z = Z_0 \cdot q^n = 45{,}6\text{ Mio} \cdot 1{,}015^{17} \approx 58{,}7\text{ Mio} \Rightarrow \Delta Z \approx 13{,}1\text{ Mio}$

Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Ausführliche Lösungen

A1	Ausführliche Lösungen	
	$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = \underline{\underline{9}}$	$(-3)^3 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = \underline{\underline{-27}}$
	$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = \underline{\underline{81}}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$
	$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$	$-3^3 = -3\cdot 3\cdot 3 = \underline{\underline{-27}}$
	$-3^2 = -3\cdot 3 = \underline{\underline{-9}}$	$-(-3)^3 = -(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -(-27) = \underline{\underline{27}}$

A2	Ausführliche Lösungen			
	a)	$3x^4 - x^4 - x^3(x+2)$ $= 3x^4 - x^4 - x^4 - 2x^3$ $= \underline{\underline{x^4 - 2x^3}}$	b)	$-12a^2 + 3a(a+1)$ $= -12a^2 + 3a^2 + 3a$ $= \underline{\underline{-9a^2 + 3a}}$
	c)	$ax^n + 4x^n$ $= \underline{\underline{(a+4)x^n}}$	d)	$(1-u)^2 - \frac{1}{3}(1-u)^2$ $= \underline{\underline{\frac{1}{2}(1-u)^2}}$
	e)	$a(x+u)^k - b(x+u)^k$ $= \underline{\underline{(a-b)(x+u)^k}}$	f)	$ux^3 - 3x^2 + 2ux^3 - 4x^2$ $= \underline{\underline{3ux^3 - 7x^2}}$

A3	Ausführliche Lösungen	
	a)	$3a^k \cdot a^{k-1} \cdot a = 3a^{k+k-1+1} = \underline{\underline{3a^{2k}}}$
	b)	$\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^{4+2} = \underline{\underline{\left(\frac{x}{3}\right)^6}}$
	c)	$u^3 \cdot u^4 - u^5(u^2+1) = u^7 - u^7 - u^5 = \underline{\underline{-u^5}}$
	d)	$x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 = x^{2+3+4} = \underline{\underline{x^9}}$
	e)	$a \cdot b^k \cdot a^{2n} \cdot b^{k-3} = a \cdot a^{2n} \cdot b^k \cdot b^{k-3} = a^{1+2n} \cdot b^{k+k-3} = \underline{\underline{a^{2n+1} \cdot b^{2k-3}}}$
	f)	$u^2 \cdot x^2 \cdot u^n \cdot x^{n-1} = u^2 \cdot u^n \cdot x^2 \cdot x^{n-1} = u^{2+n} \cdot x^{2+n+1} = \underline{\underline{u^{2+n} \cdot x^{n+1}}}$
	g)	$b^n \cdot b^{2n+1} = b^{n+2n+1} = \underline{\underline{b^{3n+1}}}$
	h)	$(x-2)^n \cdot (x-2)^{1-n} = (x-2)^{n+1-n} = (x-2)^1 = \underline{\underline{x-2}}$
	i)	$(x+1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n+1} = (x+1)^{n-1+n+1} = \underline{\underline{(x+1)^{2n}}}$

A4	Ausführliche Lösungen	
	a)	$0{,}3^6\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^6=\left(\frac{3}{10}\right)^6\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^6=\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{10}}{\cancel{3}}\right)^6=1^6=\underline{\underline{1}}$
	b)	$2^x\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x\cdot 5=\left(\cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{2}}\right)^x\cdot 5=5^x\cdot 5=\underline{\underline{5^{x+1}}}$
	c)	$2^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=2\cdot 2^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=2\cdot\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right)^4=2\cdot 1^4=\underline{\underline{2}}$
	d)	$\left(\frac{x}{4}\right)^4\cdot 4^6=\left(\frac{x}{4}\right)^4\cdot 4^4\cdot 4^2=\left(\frac{x}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}\right)^4\cdot 4^2=x^4\cdot 4^2=\underline{\underline{16x^4}}$
	e)	$(x-3)^n\cdot(x+3)^n=\left[(x-3)(x+3)\right]^n=\underline{\underline{\left(x^2-9\right)^n}}$
	f)	$2^n\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n\cdot x=\left(\cancel{2}\cdot\frac{x}{\cancel{2}}\right)^n\cdot x=x^n\cdot x=\underline{\underline{x^{n+1}}}$
	g)	$9\cdot 3^{n+1}=3^2\cdot 3^{n+1}=3^{2+n+1}=\underline{\underline{3^{n+3}}}$
	h)	$(a-b)^9(a-b)=(a-b)^{9+1}=\underline{\underline{(a-b)^{10}}}$
	i)	$\left(\frac{a-b}{c}\right)^{2k}\cdot\left(\frac{c}{b-a}\right)^{2k}=\left(\frac{a-b}{c}\cdot\frac{c}{b-a}\right)^{2k}=\left(\frac{\cancel{a-b}}{\cancel{c}}\cdot\frac{\cancel{c}}{-\cancel{(a-b)}}\right)^{2k}=(-1)^{2k}=\underline{\underline{1}}$ falls $k\in\mathbb{Z}$

A5	Ausführliche Lösung		
	a)	$(a-b)^n+(b-a)^n=(a-b)^n+\left[(-1)(a-b)\right]^n=(a-b)^n+(-1)^n(a-b)^n$	
		falls n gerade: $(a-b)^n+\underbrace{(-1)^n}_{1}(a-b)^n$ $=(a-b)^n+(a-b)^n=\underline{\underline{2(a-b)^n}}$	falls n ungerade $(a-b)^n+\underbrace{(-1)^n}_{-1}(a-b)^n$ $=(a-b)^n-(a-b)^n=\underline{\underline{0}}$

A5 Ausführliche Lösung

b)

$$\left(x-2\right)^n+\left(2x-4\right)^n-\left(2-x\right)^n$$
$$=\left(x-2\right)^n+\left[2\cdot\left(x-2\right)\right]^n-\left[\left(-1\right)\left(x-2\right)\right]^n$$
$$=\left(x-2\right)^n+2^n\left(x-2\right)^n-\left(-1\right)^n\left(x-2\right)^n$$
$$=\left[1+2^n-\left(-1\right)^n\right]\left(x-2\right)^n=\left[1-\left(-1\right)^n+2^n\right]\left(x-2\right)^n$$

falls n gerade:

$$\left[1-\underbrace{\left(-1\right)^n}_{1}+2^n\right]\left(x-2\right)^n$$
$$=\left[1-1+2^n\right]\left(x-2\right)^n$$
$$=2^n\left(x-2\right)^n$$
$$=\left[2\left(x-2\right)\right]^n=\left(2x-4\right)^n$$
$$\Rightarrow\left(x-2\right)^n+\left(2x-4\right)^n-\left(2-x\right)^n$$
$$=\underline{\underline{\left(2x-4\right)^n}}$$

falls n ungerade:

$$\left[1-\underbrace{\left(-1\right)^n}_{-1}+2^n\right]\left(x-2\right)^n$$
$$=\left[1-\left(-1\right)+2^n\right]\left(x-2\right)^n$$
$$=\left[1+1+2^n\right]\left(x-2\right)^n$$
$$=\left(2+2^n\right)\left(x-2\right)^n$$
$$\Rightarrow\left(x-2\right)^n+\left(2x-4\right)^n-\left(2-x\right)^n$$
$$=\underline{\underline{\left(2+2^n\right)\left(x-2\right)^n}}$$

A6 Ausführliche Lösung

Falls die Behauptung für alle $a,b\in\mathbb{R}$ gelten soll, müsste sie auch für

$a=1$ und $b=1$ gelten: $\underbrace{1^2+1^2}_{2}\neq\underbrace{\left(1+1\right)^2}_{4}$

Das ist offensichtlich nicht der Fall. Die Behauptung gilt nicht für alle a, b.
Es gibt aber Zahlen, die zu einer wahren Aussage führen:

für $a=0$ gilt: $0^2+b^2=\left(0+b\right)^2\Leftrightarrow b^2=b^2$

für $b=0$ gilt: $a^2+0^2=\left(a+0\right)^2\Leftrightarrow a^2=a^2$

A7 Ausführliche Lösung

Bedingungen für a und b, damit gilt: $a^3+b^3=\left(a+b\right)^3$

falls $a=-b$ ist, gilt:

$$\left(-b\right)^3+\left(b^3\right)=\left(-b+b\right)^3$$
$$\Leftrightarrow -b^3+b^3=0^3$$
$$\Leftrightarrow 0=0$$

falls $b=-a$ ist, gilt:

$$\left(a\right)^3+\left(-a^3\right)=\left(a-a\right)^3$$
$$\Leftrightarrow a^3-a^3=0^3$$
$$\Leftrightarrow 0=0$$

A8	Ausführliche Lösung
	Durch systematisches Suchen findet man:
	$a^2 + b^2 \quad \boxed{?} \quad c^2$
	$a = 1; b = 2; c = 3 \Rightarrow \quad 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \quad \neq \quad 3^2 = 9$
	$a = 2; b = 3; c = 4 \Rightarrow \quad 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \quad \neq \quad 4^2 = 16$
	$a = 3; b = 4; c = 5 \Rightarrow \quad 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \quad = \quad 5^2 = 25$

A9	Ausführliche Lösung
	Anzahl der Jahre bis 2020: $n = 17$
	Bevölkerungswachstum um 1,5% pro Jahr $\Rightarrow q = 1 + \frac{1,5}{100} = 1,015$
	Exponentialles Wachstum: $Z = Z_0 \cdot q^n$
	$Z = Z_0 \cdot q^n = 45,6\ \text{Mio} \cdot 1,015^{17} \approx 58,7\ \text{Mio} \Rightarrow \Delta Z \approx 13,1\ \text{Mio}$