Lösungen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen II

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{4}e^{x+1}=\frac{e^x}{4}(2-e)$
	b)	$2^x+2^{x+1}=3\cdot 2^x$
	c)	$x^{n+2}-6x^{n+1}+9x^n=x^n(x-3)^2$

E2	Ergebnisse	
	a)	$e^x-e^{3x}=e^x\left(1-e^{2x}\right)$
	b)	$e^{2x}-1=\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)$
	c)	$x^2e^x+2xe^x+e^x=e^x(x+1)^2$
	d)	$a^n+a^{4-n}+a^{2n}=a^{2n}\left(a^{-n}+a^{4-3n}+1\right)$
	e)	$e^{3x}-2e^{-x}=e^{-x}\left(e^{4x}-2\right)$
	f)	$ke^{2x}-2e^{x+1}=e^x\left(ke^x-2e\right)$

E3	Ergebnisse	
	a)	$\left(e^x+e^{-x}\right)^2=e^{2x}+e^{-2x}+2$
	b)	$\left(e^x-e^{-x}+5\right)e^x=e^{2x}+5\cdot e^x-1$
	c)	$2^x\left(2^{-1}+2^x\right)=2^x\left(2^{-1}+2^x\right)$

E4	Ergebnisse				
a)	$\frac{1}{4}\cdot 2^4\cdot\left(2^2\right)^3=256=2^8$	b)	$-\left(x^4-2\right)^2=-x^8+4x^4-4$	c)	$\frac{e^{3x}+e^{2x}}{e^{2x}}=e^x+1$
d)	$128\cdot 2^{n-7}=2^n$	e)	$243\cdot 3^{n-5}=3^n$	f)	$\frac{3^{2n+4}}{81}=3^{2n}$

E5	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt[3]{\sqrt{216}}=\sqrt{6}$	b)	$\sqrt[4]{625a^3\cdot\sqrt[3]{4^6\cdot\sqrt{a^4}}}=10a$
	c)	$\sqrt[5]{x^{10}\cdot y^5\cdot z^{15}}=x^2\cdot y\cdot z^3$	d)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}=\sqrt[3]{a^2}$
	e)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}}\cdot\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt[12]{x}=x^2$	f)	$\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\frac{5a+b}{a-b}}=(a+b)\sqrt{5}$

E6	Ergebnisse					
	a)	$\frac{\ln(2)}{3}-1\approx -0,768950$	b)	$\frac{\ln(\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2})}\approx 1,58496$	c)	$\ln\left(\frac{2}{e}\right)-1\approx -1,30685$

E7	Ergebnisse					
	a)	$\left(k-e^{\ln(2k)}\right)^2=k^2$	b)	$\ln\left(\sqrt{e^{2k}}\right)=k$	c)	$e^{\ln(2k)}-2ke^{\ln(2)}=-2k$

E8	Ergebnisse			
	a)	$\log\left(\sqrt{2xy}\right)=\frac{1}{2}\left[\log(2)+\log(x)+\log(y)\right]$	b)	$\ln(u)+2\ln(v)=\ln\left(uv^2\right)$
	c)	$-\lg\left(\frac{1}{u}\right)=\lg(u)$	d)	$\lg(x)-\lg(y)+\frac{1}{2}\lg(z)=\lg\left(\frac{x\sqrt{z}}{y}\right)$
	e)	$\ln(e)^2-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=3\ln(2)-1$	f)	$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$

Potenz- Wurzel- und Logarithmengesetze

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$a^0=1$	$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$	$\sqrt{a^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$

Logarithmus zur Basis 10 (Zehner- oder dekadischer Logarithmus) [LOG]-Taste

$x=\lg(b)\Leftrightarrow 10^x=b$	$\lg(b\cdot c)=\lg(b)+\lg(c)$
$\lg\left(\frac{b}{c}\right)=\lg(b)-\lg(c)$	$\lg\left(b^c\right)=c\cdot\lg(b)$
$\lg(10)=1$ $\qquad \lg(1)=0$	$b=10^{\lg(b)}$ $\qquad b^x=10^{x\cdot\lg(b)}$

Logarithmus zur Basis e (Natürlicher Logarithmus oder Logarithmus Naturalis)

$x=\ln(b)\Leftrightarrow e^x=b$	$\ln(b\cdot c)=\ln(b)+\ln(c)$
$\ln\left(\frac{b}{c}\right)=\ln(b)-\ln(c)$	$\ln\left(b^c\right)=c\cdot\ln(b)$
$\ln(e)=1$ $\qquad \ln(1)=0$	$b=e^{\ln(b)}$ $\qquad b^x=e^{x\cdot\ln(b)}$

Umrechnung von einem Logarithmensystem in ein anderes.

$\log_a(b)=\frac{\lg(b)}{\lg(a)}=\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$	$\log_3(5)=\frac{\lg(5)}{\lg(3)}=\frac{\ln(5)}{\ln(3)}\approx 1,4649735$

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösungen.

Hinweis: Ein Faktor wird aus einer Summe ausgeklammert, indem jeder Summand durch diesen Faktor dividiert wird. Zur Probe sollte man nach dem Ausklammern das Produkt bilden, so dass wieder der Ausgangsterm entsteht. In den meisten Fällen lässt sich die Probe durch Kopfrechnung durchführen.

a)
$$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1} = \frac{e^x}{4}\cdot(\ldots) \qquad \frac{e^x}{2} : \frac{e^x}{4} = \frac{4\cdot e^x}{2\cdot e^x} = 2 \qquad \frac{1\cdot e^{x+1}}{4} : \frac{e^x}{4} = \frac{4\cdot e^{x+1}}{4\cdot e^x} = e$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1} = \underline{\underline{\frac{e^x}{4}\cdot(2-e)}} \qquad \text{Probe: } \frac{e^x}{4}\cdot 2 - \frac{e^x}{4}\cdot e = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}e^{x+1}$$

b)
$$2^x + 2^{x+1} = 2^x\cdot(\ldots) \qquad \frac{2^x}{2^x} = 1 \qquad \frac{2^{x+1}}{2^x} = 2$$
$$\Rightarrow 2^x + 2^{x+1} = 2^x\cdot(1+2) = 2^x\cdot 3 = \underline{\underline{3\cdot 2^x}}$$

c)
$$x^{n+2} - 6x^{n+1} + 9x^n = x^n\cdot(\ldots) \qquad \frac{x^{n+2}}{x^n} = x^2 \qquad \frac{6x^{n+1}}{x^n} = 6x \qquad \frac{9x^n}{x^n} = 9$$
$$\Rightarrow x^{n+2} - 6x^{n+1} + 9x^n = x^n\cdot\underbrace{\left(x^2 - 6x + 9\right)}_{\text{2. bin. Formel}} = \underline{\underline{x^n\,(x-3)^2}}$$

A2 Ausführliche Lösungen

a)
$$e^x - e^{3x} = e^x\cdot(\ldots) \qquad \frac{e^x}{e^x} = 1 \qquad \frac{e^{3x}}{e^x} = e^{2x}$$
$$\Rightarrow e^x - e^{3x} = \underline{\underline{e^x\cdot\left(1-e^{2x}\right)}}$$

b)
$$e^{2x} - 1 = \left(e^x - 1\right)\cdot(\ldots) \qquad \underbrace{e^{2x} - 1}_{\text{3. bin. Formel}} = \underline{\underline{\left(e^x - 1\right)\left(e^x + 1\right)}}$$

c)
$$x^2e^x + 2xe^x + e^x = e^x\cdot(\ldots)$$
$$\Rightarrow x^2e^x + 2xe^x + e^x = e^x\cdot\underbrace{\left(x^2 + 2x + 1\right)}_{\text{1. bin. Formel}} = \underline{\underline{e^x\,(x+1)^2}}$$

d)
$$a^n + a^{4-n} + a^{2n} = a^{2n}\,(\ldots) \qquad \frac{a^n}{a^{2n}} = a^{-n} \qquad \frac{a^{4-n}}{a^{2n}} = a^{4-3n} \qquad \frac{a^{2n}}{a^{2n}} = 1$$
$$\Rightarrow a^n + a^{4-n} + a^{2n} = \underline{\underline{a^{2n}\left(a^{-n} + a^{4-3n} + 1\right)}}$$

e)
$$e^{3x} - 2e^{-x} = e^{-x}\,(\ldots) \qquad \frac{e^{3x}}{e^{-x}} = e^{4x} \qquad \frac{2e^{-x}}{e^{-x}} = 2$$
$$\Rightarrow e^{3x} - 2e^{-x} = \underline{\underline{e^{-x}\left(e^{4x} - 2\right)}}$$

f)
$$ke^{2x} - 2e^{x+1} = e^x\,(\ldots) \qquad \frac{ke^{2x}}{e^x} = k\cdot e^x \qquad \frac{2e^{x+1}}{e^x} = 2e^1 = 2e$$
$$\Rightarrow ke^{2x} - 2e^{x+1} = \underline{\underline{e^x\left(k\cdot e^x - 2e\right)}}$$

A3	Ausführliche Lösungen
a)	$\left(e^x+e^{-x}\right)^2=e^{2x}+2\cdot e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x}=e^{2x}+2+e^{-2x}=\underline{\underline{e^{2x}+e^{-2x}+2}}$
b)	$\left(e^x-e^{-x}+5\right)e^x=e^{2x}-e^{-x}\cdot e^x+5\cdot e^x=e^{2x}-1+5\cdot e^x=\underline{\underline{e^{2x}+5\cdot e^x-1}}$
c)	$2^x\left(2^{-1}+2^x\right)=\underline{\underline{2^{x-1}+2^{2x}}}$

A4	Ausführliche Lösungen
a)	$\frac{1}{4}\cdot 2^4\cdot\left(2^2\right)^3=\frac{1}{2^2}\cdot 2^4\cdot 2^6=2^4\cdot 2^6\cdot 2^{-2}=\underline{\underline{2^8}}$
b)	$-\left(x^4-2\right)^2=-\left[x^8-4x^4+4\right]=\underline{\underline{-x^8+4x^4-4}}$
c)	$\frac{e^{3x}+e^{2x}}{e^{2x}}=\frac{e^{3x}}{e^{2x}}+\frac{e^{2x}}{e^{2x}}=\underline{\underline{e^x+1}}$
d)	$128\cdot 2^{n-7}=2^7\cdot 2^{n-7}=2^{n-7+7}=\underline{\underline{2^n}}$
e)	$243\cdot 3^{n-5}=3^5\cdot 3^{n-5}=3^{n-5+5}=\underline{\underline{3^n}}$
f)	$\frac{3^{2n+4}}{81}=\frac{3^{2n+4}}{3^4}=3^{2n+4-4}=\underline{\underline{3^{2n}}}$

A5	Ausführliche Lösungen Hinweis: Verwandeln Sie bei Bedarf Wurzeln in Potenzen mit gebrochenem Exponenten.
a)	$\sqrt[3]{\sqrt{216}}=\sqrt[3]{216^{\frac{1}{2}}}=\left(216^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(216^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\left(6^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}=6^{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{\sqrt{6}}}$
b)	$\sqrt[4]{625a^3\cdot\sqrt[3]{4^6\cdot\sqrt{a^4}}}=\sqrt[4]{5^4\cdot a^3\cdot\sqrt[3]{2^{12}\cdot a\cdot a^2}}=\sqrt[4]{5^4\cdot a^3\cdot a\cdot\sqrt[3]{2^{12}}}$ $=\sqrt[4]{5^4\cdot a^4\cdot 2^{\frac{12}{3}}}=\left(5^4\cdot a^4\cdot 2^4\right)^{\frac{1}{4}}=5\cdot a\cdot 2=\underline{\underline{10a}}$
c)	$\sqrt[5]{x^{10}\cdot y^5\cdot z^{15}}=\left(x^{10}\cdot y^5\cdot z^{15}\right)^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{10}{5}}\cdot y^{\frac{5}{5}}\cdot z^{\frac{15}{5}}=\underline{\underline{x^2\cdot y\cdot z^3}}$
d)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}=\sqrt[4]{a^{\frac{8}{3}}}=\left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{3}}=\underline{\underline{\sqrt[3]{a^2}}}$
e)	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}}\cdot\sqrt[3]{x^4}\cdot\sqrt[12]{x}=\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{1}{12}}$ $=x^{\frac{4}{12}}\cdot x^{\frac{3}{12}}\cdot x^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{1}{12}}=x^{\frac{4}{12}}\cdot x^{\frac{3}{12}}\cdot x^{\frac{16}{12}}\cdot x^{\frac{1}{12}}=x^{\frac{4}{12}+\frac{3}{12}+\frac{16}{12}+\frac{1}{12}}=x^{\frac{24}{12}}=\underline{\underline{x^2}}$
f)	$\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\frac{5a+b}{a-b}}=\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(5a+5b\right)}{a-b}}=\sqrt{\frac{\left(a+b\right)\left(a-b\right)\cdot 5\cdot\left(a+b\right)}{a-b}}$ $=\sqrt{5\left(a+b\right)^2}=\left(a+b\right)\cdot\sqrt{5}=\underline{\underline{\sqrt{5}\left(a+b\right)}}$

A6	Ausführliche Lösungen	
	a)	$\frac{\ln(2)}{3}-1\approx\underline{\underline{-0,76895}}$
	b)	$\frac{\ln\left(\sqrt{3}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}=\frac{\ln(3)^{\frac{1}{2}}}{\ln(2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}\ln(3)}{\frac{1}{2}\ln(2)}=\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\approx\underline{\underline{1,58496}}$
	c)	$\ln\left(\frac{2}{e}\right)-1=\ln(2)-\ln(e)-1=\ln(2)-1-1=\ln(2)-2\approx\underline{\underline{-1,30685}}$

A7	Ausführliche Lösungen	
	a)	$\left(k-e^{\ln 2k}\right)^2$ aus $e^{\ln(a)}=a$ folgt $e^{\ln(2k)}=2k$ $\Rightarrow\left(k-e^{\ln(2k)}\right)^2=(k-2k)^2=(-k)^2=\underline{\underline{k^2}}$
	b)	$\ln\left(\sqrt{e^{2k}}\right)=\ln\left(e^{2k}\right)^{\frac{1}{2}}=\ln(e)^k=k\cdot\ln(e)=\underline{\underline{k}}$
	c)	$e^{\ln(2k)}-2ke^{\ln(2)}=2k-2k\cdot 2=2k-4k=\underline{\underline{-2k}}$

A8	Ausführliche Lösungen	
	a)	$\log\left(\sqrt{2xy}\right)=\log(2xy)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\log(2xy)=\underline{\underline{\frac{1}{2}\left[\log(2)+\log(x)+\log(y)\right]}}$
	b)	$\ln(u)+2\ln(v)=\ln(u)+\ln(v)^2=\underline{\underline{\ln\left(uv^2\right)}}$
	c)	$-\lg\left(\frac{1}{u}\right)=-\lg(u)^{-1}=-(-1)\cdot\lg(u)=\underline{\underline{\lg u}}$
	d)	$\lg x-\lg y+\frac{1}{2}\lg z=\lg x-\lg y+\lg\sqrt{z}=\underline{\underline{\lg\left(\frac{x\cdot\sqrt{z}}{y}\right)}}$
	e)	$\ln(e)^2-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=2\cdot\ln(e)-3\left[\ln(e)-\ln(2)\right]$ $=2-3+3\cdot\ln(2)=-1+3\cdot\ln(2)=\underline{\underline{3\cdot\ln(2)-1}}$
	f)	$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\underline{\underline{\ln(1-x)-\ln(1+x)}}$