

Lösungen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a) $(1-k)^2 - \frac{1}{2}(1-k)^2 = \frac{1}{2}(1-k)^2$	b) $a(x+k)^u - b(x+k)^u = (x+k)^u(a-b)$
	c) $kx^3 - 3x^2 + 2kx^3 - 4x^2 = 3kx^3 - 7x^2$	d) $(x+1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n+1} = (x+1)^{2n}$
e) $\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^6$	f) $(x-2)^n \cdot (x-2)^{1-n} = x-2$	

E2	Ergebnisse		
	a) $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{4x-1}$	b) $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = 0$	c) $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3} = \frac{1}{e}$
d) $4k^2 \cdot k^{-3} - k \cdot k^{-2} = \frac{3}{k}$	e) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}} = e^x + e^{-x}$	f) $\frac{1,5e^{3x} - e^x}{1,5e^{3x}} = 1 - \frac{2}{3}e^{-2x}$	

E3	Ergebnisse		
	a) $\frac{x^{2n+1}}{x^n} = x^{n+1}$	b) $\frac{15e^{x+1}}{5e^x} = 3e$	c) $\frac{4^{x+2}}{16} = 4^x$
d) $\frac{10^3}{2^3} = 5^3$	e) $\frac{(4-x^2)^n}{(2-x)^n} = (2+x)^n$	f) $\left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right) = \frac{3}{8}x^2$	

E4	Ergebnisse		
	a) $(3b^{n+1} \cdot c^{n-1})^2 = 9b^{2n+2}c^{2n-2}$	b) $(0,5e^{x+2})^2 = 0,25e^{2x+4}$	c) $\frac{x^{n-4}}{x^{n-5}} = x$
d) $\frac{x^n}{x^{n-2}} = x^2$	e) $\left(\frac{25ab}{15xy}\right)^n \cdot \left(\frac{5x \cdot 3y}{5b \cdot 10a}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	f) $\left(\frac{x^7}{y^4}\right) \cdot \left(\frac{y}{x^{-3}}\right)^4 = x^{19}$	

E5	Ergebnisse		
	a) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$	b) $\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}+2)$	c) $\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
d) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{15}$	e) $\frac{k+\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}(\sqrt{k}+1)$	f) $\frac{k}{\sqrt{k}-1} = \frac{k(\sqrt{k}+1)}{k-1}$	

E6	Ergebnisse		
	a) $\ln(8) \approx 2,07944$	b) $\ln(2+e) \approx 1,55144$	c) $3\ln(e^{-2}) = -6$
d) $[\ln(1-e^{-1})]^2 \approx 0,21038$	e) $\ln(2) - \ln(\sqrt{e}) \approx 0,193$	f) $\ln(2) \cdot [\ln(e^3) - 2] \approx 0,693$	

E7	Ergebnisse		
a)	$6\,000\,000 = 6 \cdot 10^6$	b)	$445\,000\,000\,000 = 4,45 \cdot 10^{11}$
c)	$0,000\,04 = 4 \cdot 10^{-5}$	d)	$0,000\,52 = 5,2 \cdot 10^{-4}$
e)	$\frac{1}{0,005} = 2 \cdot 10^2$	f)	$-0,052 = -5,2 \cdot 10^{-2}$

Potenz- Wurzel- und Logarithmengesetze

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt{a})^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Logarithmus zur Basis a

$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$	$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$	$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$
$\log_a(a) = 1$ $\log_a(1) = 0$	$b = a^{\log_a(b)}$ $b^x = a^{x \cdot \log_a(b)}$

Logarithmus zur Basis 10 (Zehner- oder dekadischer Logarithmus) [LOG]-Taste

$x = \lg(b) \Leftrightarrow 10^x = b$	$\lg(b \cdot c) = \lg(b) + \lg(c)$
$\lg\left(\frac{b}{c}\right) = \lg(b) - \lg(c)$	$\lg(b^c) = c \cdot \lg(b)$
$\lg(10) = 1$ $\lg(1) = 0$	$b = 10^{\lg(b)}$ $b^x = 10^{x \cdot \lg(b)}$

Logarithmus zur Basis e (Natürlicher Logarithmus oder Logarithmus Naturalis)

$x = \ln(b) \Leftrightarrow e^x = b$	$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$
$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$
$\ln(e) = 1$ $\ln(1) = 0$	$b = e^{\ln(b)}$ $b^x = e^{x \cdot \ln(b)}$

Umrechnung von einem Logarithmensystem in ein anderes.

$\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$	$\log_3(5) = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1,4649735$
---	---

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen:

A1	Aufgabe					
	Vereinfachen Sie					
	a)	$(1-k)^2 - \frac{1}{2}(1-k)^2$	b)	$a(x+k)^u - b(x+k)^u$	c)	$kx^3 - 3x^2 + 2kx^3 - 4x^2$
d)	$(x+1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n+1}$	e)	$\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2$	f)	$(x-2)^n \cdot (x-2)^{1-n}$	

A1	Ausführliche Lösungen					
	a)	$(1-k)^2 - \frac{1}{2}(1-k)^2 = 1 \cdot (1-k)^2 - \frac{1}{2}(1-k)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}(1-k)^2}}$				
	b)	$a(x+k)^u - b(x+k)^u = \underline{\underline{(x+k)^u(a-b)}}$				
	c)	$kx^3 - 3x^2 + 2kx^3 - 4x^2 = kx^3 + 2kx^3 - 3x^2 - 4x^2 = \underline{\underline{3kx^3 - 7x^2}}$				
	d)	$(x+1)^{n-1} \cdot (x+1)^{n+1} = (x+1)^{n-1+n+1} = \underline{\underline{(x+1)^{2n}}}$				
	e)	$\left(\frac{x}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^{4+2} = \underline{\underline{\left(\frac{x}{3}\right)^6}}$				
f)	$(x-2)^n \cdot (x-2)^{1-n} = (x-2)^{n+1-n} = (x-2)^1 = \underline{\underline{x-2}}$					

A2	Aufgabe					
	Vereinfachen Sie und fassen Sie zusammen					
	a)	$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$	b)	$\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$	c)	$e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$
d)	$4k^2 \cdot k^{-3} - k \cdot k^{-2}$	e)	$\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}}$	f)	$\frac{1,5e^{3x} - e^x}{1,5e^{3x}}$	

A2	Ausführliche Lösungen
a)	$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{3x+1-(-x+2)} = e^{3x+1+x-2} = \underline{\underline{e^{4x-1}}}$
b)	$\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = e^{-2x} + 3e^{-2x} - 4e^{-2x} = \underline{\underline{0}}$
c)	$e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3} = e^{-x-x+2+2x-3} = e^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{e}}}$
d)	$4k^2 \cdot k^{-3} - k \cdot k^{-2} = 4k^{-1} - k^{-1} = 3k^{-1} = \underline{\underline{\frac{3}{k}}}$
e)	$\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = \underline{\underline{e^x + e^{-x}}}$
f)	$\frac{1,5e^{3x} - e^x}{1,5e^{3x}} = 1 - \frac{e^x}{1,5 \cdot e^{3x}} = 1 - \underline{\underline{\frac{3}{2}e^{-2x}}}$

A3	Aufgabe				
Vereinfachen Sie					
a)	$\frac{x^{2n+1}}{x^n}$	b)	$\frac{15e^{x+1}}{5e^x}$	c)	$\frac{4^{x+2}}{16}$
d)	$\frac{10^3}{2^3}$	e)	$\frac{(4-x^2)^n}{(2-x)^n}$	f)	$\left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right)$

A3	Ausführliche Lösungen
a)	$\frac{x^{2n+1}}{x^n} = x^{2n+1-n} = \underline{\underline{x^{n+1}}}$
b)	$\frac{15e^{x+1}}{5e^x} = 3 \cdot \frac{e^{x+1}}{e^x} = 3 \cdot e^{x+1-x} = 3 \cdot e^1 = \underline{\underline{3e}}$
c)	$\frac{4^{x+2}}{16} = \frac{4^{x+2}}{4^2} = 4^{x+2-2} = \underline{\underline{4^x}}$
d)	$\frac{10^3}{2^3} = \left(\frac{10}{2}\right)^3 = \underline{\underline{5^3}}$
e)	$\frac{(4-x^2)^n}{(2-x)^n} = \frac{[(2+x)(2-x)]^n}{(2-x)^n} = \left[\frac{(2+x)(2-x)}{2-x}\right]^n = \underline{\underline{(2+x)^n}}$
f)	$\left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x^3}{2^3} : \frac{x}{3} = \frac{3x^3}{2^3 x} = \underline{\underline{\frac{3}{8}x^2}}$

A4	Aufgabe					
	Vereinfachen Sie					
	a)	$(3b^{n+1} \cdot c^{n-1})^2$	b)	$(0,5e^{x+2})^2$	c)	$\frac{x^{n-4}}{x^{n-5}}$
d)	$\frac{x^n}{x^{n-2}}$	e)	$\left(\frac{25ab}{15xy}\right)^n \cdot \left(\frac{5x \cdot 3y}{5b \cdot 10a}\right)^n$	f)	$\left(\frac{x^7}{y^4}\right) \cdot \left(\frac{y}{x^{-3}}\right)^4$	

A4	Ausführliche Lösungen					
	a)	$(3b^{n+1} \cdot c^{n-1})^2 = 9b^{2(n+1)} \cdot c^{2(n-1)} = \underline{\underline{9b^{2n+2} \cdot c^{2n-2}}}$				
	b)	$(0,5e^{x+2})^2 = 0,5^2 e^{2x+4} = \underline{\underline{0,25e^{2x+4}}}$				
	c)	$\frac{x^{n-4}}{x^{n-5}} = x^{n-4-(n-5)} = x^{n-4-n+5} = \underline{\underline{x}}$				
	d)	$\frac{x^n}{x^{n-2}} = x^{n-(n-2)} = x^{n-n+2} = \underline{\underline{x^2}}$				
	e)	$\left(\frac{25ab}{15xy}\right)^n \cdot \left(\frac{5x \cdot 3y}{5b \cdot 10a}\right)^n = \left[\frac{25ab \cdot 5x \cdot 3y}{15xy \cdot 5b \cdot 10a}\right]^n = \left(\frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3abxy}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5abxy}\right)^n = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$				
f)	$\left(\frac{x^7}{y^4}\right) \cdot \left(\frac{y}{x^{-3}}\right)^4 = \frac{x^7}{y^4} \cdot \frac{y^4}{x^{-3 \cdot 4}} = \frac{x^7}{x^{-12}} = x^7 \cdot x^{12} = \underline{\underline{x^{19}}}$					

A5	Aufgabe					
	Machen Sie den Nenner rational					
	a)	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	b)	$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$	c)	$\frac{3}{\sqrt{12}}$
d)	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$	e)	$\frac{k+\sqrt{k}}{2\sqrt{k}}$	f)	$\frac{k}{\sqrt{k}-k}$	

A5	Ausführliche Lösungen	
a)	$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$	
b)	$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+2}{1-2} = \frac{2+\sqrt{2}}{-1} = \underline{\underline{-(2+\sqrt{2})}}$	
c)	$\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3 \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} = \frac{3 \cdot \sqrt{12}}{12} = \frac{1}{4} \sqrt{12} = \frac{1}{4} \sqrt{3 \cdot 4} = \frac{2}{4} \sqrt{3} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sqrt{3}}}$	
d)	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{5-3} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$ $= \frac{1}{2}[5-2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}+3] = \frac{1}{2}[5-2 \cdot \sqrt{15}+3] = \frac{1}{2}(8-2 \cdot \sqrt{15}) = \underline{\underline{4-\sqrt{15}}}$	
e)	$\frac{k+\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = \frac{(k+\sqrt{k}) \cdot \sqrt{k}}{2\sqrt{k} \cdot \sqrt{k}} = \frac{k \cdot \sqrt{k}+k}{2k} = \frac{k \cdot (\sqrt{k}+1)}{2k} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\sqrt{k}+1)}}$	
f)	$\frac{k}{\sqrt{k}-1} = \frac{k(\sqrt{k}+1)}{(\sqrt{k}-1)(\sqrt{k}+1)} = \underline{\underline{\frac{k(\sqrt{k}+1)}{k-1}}}$	

A6	Aufgabe		
	Bestimmen Sie die folgenden Logarithmen		
a)	$\ln(8)$	b)	$\ln(2+e)$
c)	$3 \ln(e^{-2})$		
d)	$[\ln(1-e^{-1})]^2$	e)	$\ln(2) - \ln(\sqrt{e})$
f)	$\ln(2) \cdot [\ln(e^3) - 2]$		

A6	Ausführliche Lösungen	
a)	$\ln(8) \approx \underline{\underline{2,07944}}$	
b)	$\ln(2+e) \approx \underline{\underline{1,55144}}$	
c)	$3 \ln(e^{-2}) = 3 \cdot (-2) \cdot \underbrace{\ln(e)}_1 = \underline{\underline{-6}}$	
d)	$[\ln(1-e^{-1})]^2 \approx \underline{\underline{0,21038}}$	
e)	$\ln(2) - \ln(\sqrt{e}) = \ln(2) - \ln(e)^{\frac{1}{2}} = \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(e) = \ln(2) - \frac{1}{2} \approx \underline{\underline{0,193}}$	
f)	$\ln(2) \cdot [\ln(e^3) - 2] = \ln(2) \cdot [3 \cdot \ln(e) - 2] = \ln(2) \cdot (3 - 2) = \ln(2) \approx \underline{\underline{0,693}}$	

A7	Aufgabe		
	Schreiben Sie die Zahlen als Produkt einer reellen Zahl mit einer Zehnerpotenz		
a)	6 000 000	b)	445 000 000 000
c)	0,000 04		
d)	0,000 52	e)	$\frac{1}{0,005}$
f)	-0,052		

A7	Ausführliche Lösungen		
a)	$6\,000\,000 = 6 \cdot 1\,000\,000 = \underline{\underline{6 \cdot 10^6}}$		
b)	$445\,000\,000\,000 = 445 \cdot 1\,000\,000\,000 = 445 \cdot 10^9 = \underline{\underline{4,45 \cdot 10^{11}}}$		
c)	$0,000\,04 = 0,000\,040 = \frac{40}{1\,000\,000} = 40 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{4 \cdot 10^{-5}}}$		
d)	$0,000\,52 = 0,000\,520 = \frac{520}{1\,000\,000} = 520 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{5,2 \cdot 10^{-4}}}$		
e)	$\frac{1}{0,005} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{5} \cdot 10^3 = 0,2 \cdot 10^3 = \underline{\underline{2 \cdot 10^2}}$		
f)	$-0,052 = -\frac{52}{1\,000} = -52 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{-5,2 \cdot 10^{-2}}}$		

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
<http://www.brinkmann-du.de>