Lösungen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse			
	a)	$(1-k)^2 - \frac{1}{2}(1-k)^2 = \frac{1}{2}(1-k)^2$	b)	$a(x+k)^u - b(x+k)^u = (x+k)^u(a-b)$
	c)	$kx^3 - 3x^2 + 2kx^3 - 4x^2 = 3kx^3 - 7x^2$	d)	$(x+1)^{n-1}\cdot(x+1)^{n+1} = (x+1)^{2n}$
	e)	$\left(\frac{x}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^6$	f)	$(x-2)^n\cdot(x-2)^{1-n} = x-2$

E2	Ergebnisse					
	a)	$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{4x-1}$	b)	$\frac{1}{e^{2x}} + 3\left(e^{-x}\right)^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = 0$	c)	$e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3} = \frac{1}{e}$
	d)	$4k^2\cdot k^{-3} - k\cdot k^{-2} = \frac{3}{k}$	e)	$\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^x-e^{-x}} = e^x+e^{-x}$	f)	$\frac{1{,}5e^{3x}-e^x}{1{,}5e^{3x}} = 1-\frac{2}{3}e^{-2x}$

E3	Ergebnisse					
	a)	$\frac{x^{2n+1}}{x^n} = x^{n+1}$	b)	$\frac{15e^{x+1}}{5e^x} = 3e$	c)	$\frac{4^{x+2}}{16} = 4^x$
	d)	$\frac{10^3}{2^3} = 5^3$	e)	$\frac{\left(4-x^2\right)^n}{(2-x)^n} = (2+x)^n$	f)	$\left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right) = \frac{3}{8}x^2$

E4	Ergebnisse					
	a)	$\left(3b^{n+1}\cdot c^{n-1}\right)^2$ $= 9\,b^{2n+2}c^{2n-2}$	b)	$\left(0{,}5e^{x+2}\right)^2 = 0{,}25e^{2x+4}$	c)	$\frac{x^{n-4}}{x^{n-5}} = x$
	d)	$\frac{x^n}{x^{n-2}} = x^2$	e)	$\left(\frac{25ab}{15xy}\right)^n\cdot\left(\frac{5x\cdot 3y}{5b\cdot 10a}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	f)	$\left(\frac{x^7}{y^4}\right)\cdot\left(\frac{y}{x^{-3}}\right)^4 = x^{19}$

E5	Ergebnisse					
	a)	$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$	b)	$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -\left(\sqrt{2}+2\right)$	c)	$\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
	d)	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{15}$	e)	$\frac{k+\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{k}+1\right)$	f)	$\frac{k}{\sqrt{k}-1} = \frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{k-1}$

E6	Ergebnisse					
	a)	$\ln(8) \approx 2{,}07944$	b)	$\ln(2+e) \approx 1{,}55144$	c)	$3\ln\left(e^{-2}\right) = -6$
	d)	$\left[\ln\left(1-e^{-1}\right)\right]^2 \approx 0{,}21038$	e)	$\ln(2) - \ln\left(\sqrt{e}\right) \approx 0{,}193$	f)	$\ln(2)\cdot\left[\ln\left(e^3\right)-2\right] \approx 0{,}693$

E7	Ergebnisse			
	a)	$6\,000\,000 = 6\cdot 10^6$	b)	$445\,000\,000\,000 = 4{,}45\cdot 10^{11}$
	c)	$0{,}000\,04 = 4\cdot 10^{-5}$	d	$0{,}000\,52 = 5{,}2\cdot 10^{-4}$
	e)	$\frac{1}{0{,}005} = 2\cdot 10^2$	f)	$-0{,}052 = -5{,}2\cdot 10^{-2}$

Potenz- Wurzel- und Logarithmengesetze

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Logarithmus zur Basis a

$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$	$\log_a(b\cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$	$\log_a\left(b^c\right) = c\cdot\log_a(b)$
$\log_a(a) = 1$ $\quad\log_a(1) = 0$	$b = a^{\log_a(b)}$ $\quad b^x = a^{x\cdot\log_a(b)}$

Logarithmus zur Basis 10 (Zehner- oder dekadischer Logarithmus) [LOG]-Taste

$x = \lg(b) \Leftrightarrow 10^x = b$	$\lg(b\cdot c) = \lg(b) + \lg(c)$
$\lg\left(\frac{b}{c}\right) = \lg(b) - \lg(c)$	$\lg\left(b^c\right) = c\cdot\lg(b)$
$\lg(10) = 1$ $\quad\lg(1) = 0$	$b = 10^{\lg(b)}$ $\quad b^x = 10^{x\cdot\lg(b)}$

Logarithmus zur Basis e (Natürlicher Logarithmus oder Logarithmus Naturalis)

$x = \ln(b) \Leftrightarrow e^x = b$	$\ln(b\cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$
$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$\ln\left(b^c\right) = c\cdot\ln(b)$
$\ln(e) = 1$ $\quad\ln(1) = 0$	$b = e^{\ln(b)}$ $\quad b^x = e^{x\cdot\ln(b)}$

Umrechnung von einem Logarithmensystem in ein anderes.

$\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$	$\log_3(5) = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1{,}4649735$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösungen	
	a)	$(1-k)^2-\frac{1}{2}(1-k)^2=1\cdot(1-k)^2-\frac{1}{2}(1-k)^2=\underline{\underline{\frac{1}{2}(1-k)^2}}$
	b)	$a(x+k)^u-b(x+k)^u=\underline{\underline{(x+k)^u(a-b)}}$
	c)	$kx^3-3x^2+2kx^3-4x^2=kx^3+2kx^3-3x^2-4x^2=\underline{\underline{3kx^3-7x^2}}$
	d)	$(x+1)^{n-1}\cdot(x+1)^{n+1}=(x+1)^{n-1+n+1}=\underline{\underline{(x+1)^{2n}}}$
	e)	$\left(\frac{x}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2=\left(\frac{x}{3}\right)^{4+2}=\underline{\underline{\left(\frac{x}{3}\right)^6}}$
	f)	$(x-2)^n\cdot(x-2)^{1-n}=(x-2)^{n+1-n}=(x-2)^1=\underline{\underline{x-2}}$

A2	Ausführliche Lösungen	
	a)	$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}=e^{3x+1-(-x+2)}=e^{3x+1+x-2}=\underline{\underline{e^{4x-1}}}$
	b)	$\frac{1}{e^{2x}}+3\left(e^{-x}\right)^2-\left(\frac{2}{e^x}\right)^2=e^{-2x}+3e^{-2x}-4e^{-2x}=\underline{\underline{0}}$
	c)	$e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3}=e^{-x-x+2+2x-3}=e^{-1}=\underline{\underline{\frac{1}{e}}}$
	d)	$4k^2\cdot k^{-3}-k\cdot k^{-2}=4k^{-1}-k^{-1}=3k^{-1}=\underline{\underline{\frac{3}{k}}}$
	e)	$\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^x-e^{-x}}=\underline{\underline{e^x+e^{-x}}}$
	f)	$\frac{1{,}5e^{3x}-e^x}{1{,}5e^{3x}}=1-\frac{e^x}{1{,}5\cdot e^{3x}}=\underline{\underline{1-\frac{3}{2}e^{-2x}}}$

A3	Ausführliche Lösungen
a)	$\frac{x^{2n+1}}{x^n} = x^{2n+1-n} = \underline{\underline{x^{n+1}}}$
b)	$\frac{15e^{x+1}}{5e^x} = 3 \cdot \frac{e^{x+1}}{e^x} = 3 \cdot e^{x+1-x} = 3 \cdot e^1 = \underline{\underline{3e}}$
c)	$\frac{4^{x+2}}{16} = \frac{4^{x+2}}{4^2} = 4^{x+2-2} = \underline{\underline{4^x}}$
d)	$\frac{10^3}{2^3} = \left(\frac{10}{2}\right)^3 = \underline{\underline{5^3}}$
e)	$\frac{\left(4-x^2\right)^n}{(2-x)^n} = \frac{\left[(2+x)(2-x)\right]^n}{(2-x)^n} = \left[\frac{(2+x)(2-x)}{2-x}\right]^n = \underline{\underline{(2+x)^n}}$
f)	$\left(\frac{x}{2}\right)^3 : \left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x^3}{2^3} : \frac{x}{3} = \frac{3x^3}{2^3 x} = \underline{\underline{\frac{3}{8}x^2}}$

A4	Ausführliche Lösungen
a)	$\left(3b^{n+1} \cdot c^{n-1}\right)^2 = 9b^{2(n+1)} \cdot c^{2(n-1)} = \underline{\underline{9b^{2n+2} \cdot c^{2n-2}}}$
b)	$\left(0,5e^{x+2}\right)^2 = 0,5^2 e^{2x+4} = \underline{\underline{0,25e^{2x+4}}}$
c)	$\frac{x^{n-4}}{x^{n-5}} = x^{n-4-(n-5)} = x^{n-4-n+5} = \underline{\underline{x}}$
d)	$\frac{x^n}{x^{n-2}} = x^{n-(n-2)} = x^{n-n+2} = \underline{\underline{x^2}}$
e)	$\left(\frac{25ab}{15xy}\right)^n \cdot \left(\frac{5x \cdot 3y}{5b \cdot 10a}\right)^n = \left[\frac{25ab}{15xy} \cdot \frac{5x \cdot 3y}{5b \cdot 10a}\right]^n = \left(\frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3abxy}{3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5abxy}\right)^n = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$
f)	$\left(\frac{x^7}{y^4}\right) \cdot \left(\frac{y}{x^{-3}}\right)^4 = \frac{x^7}{y^4} \cdot \frac{y^4}{x^{-3 \cdot 4}} = \frac{x^7}{x^{-12}} = x^7 \cdot x^{12} = \underline{\underline{x^{19}}}$

A5	Ausführliche Lösungen	
	a)	$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$
	b)	$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}+2}{1-2} = \frac{2+\sqrt{2}}{-1} = -\left(2+\sqrt{2}\right)$
	c)	$\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}} = \frac{3\cdot\sqrt{12}}{12} = \frac{1}{4}\sqrt{12} = \frac{1}{4}\sqrt{3\cdot 4} = \frac{2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
	d)	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{5-3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$ $= \frac{1}{2}\left[5-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}+3\right] = \frac{1}{2}\left[5-2\cdot\sqrt{15}+3\right] = \frac{1}{2}\left(8-2\cdot\sqrt{15}\right) = 4-\sqrt{15}$
	e)	$\frac{k+\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = \frac{\left(k+\sqrt{k}\right)\cdot\sqrt{k}}{2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}} = \frac{k\cdot\sqrt{k}+k}{2k} = \frac{k\cdot\left(\sqrt{k}+1\right)}{2k} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{k}+1\right)$
	f)	$\frac{k}{\sqrt{k}-1} = \frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{\left(\sqrt{k}-1\right)\left(\sqrt{k}+1\right)} = \frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{k-1}$

A6	Ausführliche Lösungen	
	a)	$\ln(8) \approx 2{,}07944$
	b)	$\ln(2+e) \approx 1{,}55144$
	c)	$3\ln\left(e^{-2}\right) = 3\cdot(-2)\cdot\underbrace{\ln(e)}_{1} = -6$
	d)	$\left[\ln\left(1-e^{-1}\right)\right]^2 \approx 0{,}21038$
	e)	$\ln(2)-\ln\left(\sqrt{e}\right) = \ln(2)-\ln(e)^{\frac{1}{2}} = \ln(2)-\frac{1}{2}\ln(e) = \ln(2)-\frac{1}{2} \approx 0{,}193$
	f)	$\ln(2)\cdot\left[\ln(e)^3-2\right] = \ln(2)\cdot\left[3\cdot\ln(e)-2\right] = \ln(2)\cdot(3-2) = \ln(2) \approx 0{,}693$

A7	Ausführliche Lösungen	
	a)	$6\,000\,000 = 6 \cdot 1\,000\,000 = \underline{\underline{6 \cdot 10^{6}}}$
	b)	$445\,000\,000\,000 = 455 \cdot 1\,000\,000\,000 = 445 \cdot 10^{9} = \underline{\underline{4,45 \cdot 10^{11}}}$
	c)	$0,000\,04 = 0,000\,040 = \dfrac{40}{1000\,000} = 40 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{4 \cdot 10^{-5}}}$
	d)	$0,000\,52 = 0,000\,520 = \dfrac{520}{1000\,000} = 520 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{5,2 \cdot 10^{-4}}}$
	e)	$\dfrac{1}{0,005} = \dfrac{1}{5 \cdot 10^{-3}} = \dfrac{1}{5} \cdot 10^{3} = 0,2 \cdot 10^{3} = \underline{\underline{2 \cdot 10^{2}}}$
	f)	$-0,052 = -\dfrac{52}{1\,000} = -52 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{-5,2 \cdot 10^{-2}}}$