Lösungen Potenzen und Wurzeln VI

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\sqrt{4}-\sqrt{8}+3\sqrt{18}=2+7\sqrt{2}$
	b)	$2\sqrt{3}-\sqrt{27}+4\sqrt{9}=12-\sqrt{3}$
	c)	$4\left(\sqrt{2}\right)^3-5\sqrt{2}+\sqrt{18}=6\sqrt{2}$

E2	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{(a+b)^3}=(a+b)^2$	b)	$\sqrt{3(x-y)}\cdot\sqrt{27(x-y)}=9(x-y)$
	c)	$\sqrt{\frac{2}{3x+7y}}\cdot\sqrt{\frac{7y+3x}{2}}=1$	d)	$\sqrt{\frac{1}{14x}}\cdot\sqrt{\frac{2x}{7}}\cdot\sqrt{\frac{8x^4}{98}}=\frac{2}{49}x^2$

E3	Ergebnisse	
	a)	$2\sqrt{75}-4\sqrt{12}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$
	b)	$(2x+y)\sqrt{98}+\sqrt{8x^2+8xy+2y^2}=8(2x+y)\sqrt{2}$
	c)	$\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{128}+\sqrt{18}=4\sqrt{2}$
	d)	$3\sqrt{2a^3b^2}-\sqrt{8a^3b^2}+\sqrt{72a^3b^2}=7ab\sqrt{2a}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$\left(a\sqrt{a+b}-b\sqrt{a-b}\right)^2-\left(b\sqrt{a+b}-a\sqrt{a-b}\right)^2=2a^2b-2b^3$
	b)	$\left(3\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y}\right)\left(3\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)+\left(3\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)^2$ $=36x+18y-6\sqrt{4x^2-y^2}$

E5	Ergebnis
	$\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{a+b}-\sqrt{a-b}+\sqrt[3]{a-b}-3\sqrt[3]{a+b}+2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$ $=3\sqrt{a+b}-2\cdot\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}$

E6	Ergebnis
	Beide Behauptungen sind falsch für $a,b\in\mathbb{R}$. z.B. $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\neq 1+2$ $\quad\sqrt{(1-2)^2}=1\neq 1-2$ Für alle $a,b\in\mathbb{R}$ gilt aber $\sqrt{(a+b)^2}=\lvert a+b\rvert$

E7	Ergebnis						
	$a\sqrt{a}$	$a^2\sqrt{a}$	$\frac{a}{\sqrt{a}}$	$\frac{\sqrt{a}}{a}$	$\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\right)^2$	$\frac{\sqrt{a}}{a^2}$	$\sqrt{\frac{1}{a^2}}$
	$a^{1,5}$	$a^{2,5}$	$a^{0,5}$	$a^{-0,5}$	a	$a^{-1,5}$	a^{-1}

E8	Ergebnis
	$e^{-0,5} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \sqrt{\frac{1}{e}}$
	$\Rightarrow \quad 5k\sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-0,5} = 5k\sqrt{\frac{1}{2k}}\cdot\sqrt{\frac{1}{e}} = 5k\sqrt{\frac{1}{2ke}} = 5\sqrt{\frac{k^2}{2ke}} = 5\sqrt{\frac{k}{2e}}$

E9	Ergebnis
	200 und dreimal die Wurzeltaste ergibt 1,939227447

E10	Ergebnis
	Kantenlänge: $a = \sqrt[3]{15\ dm^3} \approx 2,466\ dm = 24,66\ cm$
	Oberfläche: $O = 6\cdot a^2 \approx 3649,32\ cm^2$

E11	Ergebnis
	$K_5 = 1,3K_0 = K_0\left(1+i\right)^5 \Rightarrow 1+i = \sqrt[5]{1,3} \Rightarrow i \approx 0,05387$
	Der Zinssatz beträgt $\approx 5,4\%$

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n\cdot b^n = \left(a\cdot b\right)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen :

A1	Ausführliche Lösung
a)	$\sqrt{4}-\sqrt{8}+3\cdot\sqrt{18}=2-\sqrt{4\cdot 2}+3\cdot\sqrt{9\cdot 2}=2-2\cdot\sqrt{2}+9\cdot\sqrt{2}=\underline{\underline{2+7\sqrt{2}}}$

A1	Ausführliche Lösung
b)	$2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{27}+4\cdot\sqrt{9}=2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{9\cdot 3}+4\cdot 3=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+12=\underline{\underline{12-\sqrt{3}}}$

A1	Ausführliche Lösung
c)	$4\left(\sqrt{2}\right)^3-5\cdot\sqrt{2}+\sqrt{18}=4\cdot 2\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}=8\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}=\underline{\underline{6\sqrt{2}}}$

A2 Ausführliche Lösungen

a)
$$\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{(a+b)^3}$$
$$=\sqrt{(a+b)(a+b)^3}$$
$$=\sqrt{(a+b)^4}$$
$$=\underline{\underline{(a+b)^2}}$$

b)
$$\sqrt{3(x-y)}\cdot\sqrt{27(x-y)}$$
$$=\sqrt{3\cdot 3\cdot 9(x-y)(x-y)}$$
$$=\sqrt{9^2(x-y)^2}$$
$$=\underline{\underline{9(x-y)}}$$

A2 Ausführliche Lösungen

c)
$$\sqrt{\frac{2}{3x+7y}}\cdot\sqrt{\frac{7y+3x}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2(7y+3x)}{2(3x+7y)}}$$
$$=\sqrt{\frac{\cancel{2(3x+7y)}}{\cancel{2(3x+7y)}}}$$
$$=\sqrt{1}=\underline{\underline{1}}$$

d)
$$\sqrt{\frac{1}{14x}}\cdot\sqrt{\frac{2x}{7}}\cdot\sqrt{\frac{8x^4}{98}}$$
$$=\sqrt{\frac{1\cdot 2x\cdot 8x^4}{14x\cdot 7\cdot 98}}$$
$$=\sqrt{\frac{4^2x^4}{2^2\cdot 7^4}}$$
$$=\frac{4x^2}{2\cdot 7^2}=\underline{\underline{\frac{2}{49}x^2}}$$

A3 Ausführliche Lösungen

a)
$$2\cdot\sqrt{75}-4\cdot\sqrt{12}+\sqrt{3}$$
$$=2\cdot\sqrt{5^2\cdot 3}-4\cdot\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{3}$$
$$=2\cdot 5\cdot\sqrt{3}-4\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}$$
$$=10\cdot\sqrt{3}-8\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}$$
$$=\underline{\underline{3\cdot\sqrt{3}}}$$

b)
$$(2x+y)\sqrt{98}+\sqrt{8x^2+8xy+2y^2}$$
$$=8(2x+y)\sqrt{2}$$

A3 Ausführliche Lösungen

c)

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{32}+\sqrt{50}-\sqrt{128}+\sqrt{18}\\
&=\sqrt{2\cdot 16}+\sqrt{2\cdot 25}-\sqrt{2\cdot 64}+\sqrt{2\cdot 9}\\
&=4\cdot\sqrt{2}+5\cdot\sqrt{2}-8\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{2}\\
&=\underline{\underline{4\sqrt{2}}}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
&3\cdot\sqrt{2a^3b^2}-\sqrt{8a^3b^2}+\sqrt{72a^3b^2}\\
&=3\cdot\sqrt{2a^3b^2}-\sqrt{2\cdot 4a^3b^2}+\sqrt{2\cdot 36a^3b^2}\\
&=3ab\cdot\sqrt{2a}-2ab\cdot\sqrt{2a}+6ab\cdot\sqrt{2a}\\
&=\underline{\underline{7ab\sqrt{2a}}}
\end{aligned}
$$

A4 Ausführliche Lösung

a)

$$
\begin{aligned}
&\left(a\sqrt{a+b}-b\sqrt{a-b}\right)^2-\left(b\sqrt{a+b}-a\sqrt{a-b}\right)^2\\
&=a^2(a+b)-2a\sqrt{a+b}\cdot b\sqrt{a-b}+b^2(a-b)-\left[b^2(a+b)-2b\sqrt{a+b}\cdot a\sqrt{a-b}+a^2(a-b)\right]\\
&=a^2(a+b)-2ab\sqrt{(a+b)(a-b)}+b^2(a-b)-b^2(a+b)+2ab\sqrt{(a+b)(a-b)}-a^2(a-b)\\
&=a^2(a+b)-\cancel{2ab\sqrt{(a+b)(a-b)}}+b^2(a-b)-b^2(a+b)+\cancel{2ab\sqrt{(a+b)(a-b)}}-a^2(a-b)\\
&=a^2(a+b)+b^2(a-b)-b^2(a+b)-a^2(a-b)\\
&=a^2(a+b)-b^2(a+b)-a^2(a-b)+b^2(a-b)\\
&=(a+b)\left(a^2-b^2\right)-(a-b)\left(a^2-b^2\right)\\
&=\left(a^2-b^2\right)\left[(a+b)-(a-b)\right]\\
&=\left(a^2-b^2\right)\left[a+b-a+b\right]\\
&=\underline{\underline{\left(a^2-b^2\right)\cdot 2b=2a^2b-2b^3}}
\end{aligned}
$$

A4 Ausführliche Lösung

b)

$$
\begin{aligned}
&\left(3\cdot\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y}\right)\left(3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)+\left(3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)^2\\
&=\left(3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)\left(3\cdot\sqrt{2x+y}+\sqrt{2x-y}+3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)\\
&=\left(3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)\left(3\cdot\sqrt{2x+y}+\cancel{\sqrt{2x-y}}+3\cdot\sqrt{2x+y}-\cancel{\sqrt{2x-y}}\right)\\
&=\left(3\cdot\sqrt{2x+y}-\sqrt{2x-y}\right)\left(6\cdot\sqrt{2x+y}\right)\\
&=18\cdot\sqrt{2x+y}\cdot\sqrt{2x+y}-6\cdot\sqrt{2x-y}\cdot\sqrt{2x+y}\\
&=\underline{\underline{18(2x+y)-6\cdot\sqrt{4x^2-y^2}=36x+18y-6\cdot\sqrt{4x^2-y^2}}}
\end{aligned}
$$

A5 Ausführliche Lösung

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{a+b}-\sqrt{a-b}+\sqrt[3]{a-b}-3\cdot\sqrt[3]{a+b}+2\cdot\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}\\
&=\sqrt{a+b}+2\cdot\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{a+b}-3\cdot\sqrt[3]{a+b}-\sqrt{a-b}+\sqrt{a-b}+\sqrt[3]{a-b}\\
&=\sqrt{a+b}+2\cdot\sqrt{a+b}+\sqrt[3]{a+b}-3\cdot\sqrt[3]{a+b}-\cancel{\sqrt{a-b}}+\cancel{\sqrt{a-b}}+\sqrt[3]{a-b}\\
&=\underline{\underline{3\cdot\sqrt{a+b}-2\cdot\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}}
\end{aligned}
$$

A6	Ausführliche Lösung
	Beide Behauptungen sind falsch für $a,b \in \mathbb{R}$. Behauptungen: (1) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ (2) $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$ Beide Behauptungen lassen sich durch jeweils ein Beispiel widerlegen. (1) $a=1;\,b=2 \Rightarrow \sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}\neq 1+2=3$ (2) $a=1;\,b=-2 \Rightarrow \sqrt{(1-2)^2}=\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1\neq 1+(-2)=1-2=-1$ Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ gilt aber $\sqrt{(a+b)^2}=\lvert a+b\rvert$

A7	Ausführliche Lösung

$a\sqrt{a}$	$a^2\sqrt{a}$	$\frac{a}{\sqrt{a}}$	$\frac{\sqrt{a}}{a}$	$\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\right)^2$	$\frac{\sqrt{a}}{a^2}$	$\sqrt{\frac{1}{a^2}}$
$a^{1,5}$	$a^{2,5}$	$a^{0,5}$	$a^{-0,5}$	a	$a^{-1,5}$	a^{-1}

$$a\sqrt{a}=a^1\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{3}{2}}=a^{1,5} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{a\sqrt{a}=a^{1,5}}}$$

$$a^2\sqrt{a}=a^2\cdot a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}}=a^{2,5} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{a^2\sqrt{a}=a^{2,5}}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{a^1}{a^{\frac{1}{2}}}=a^1\cdot a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}=a^{0,5} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\frac{a}{\sqrt{a}}=a^{0,5}}}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\right)^2=\left(\frac{a^1}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^2=\left(a^1\cdot a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2=a \Rightarrow \underline{\underline{\left(\frac{a}{\sqrt{a}}\right)^2=a}}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{a^2}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-2}=a^{-\frac{3}{2}}=a^{-1,5} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\sqrt{a}}{a^2}=a^{-1,5}}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\sqrt{a^{-2}}=\left(a^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{-1} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{a^2}}=a^{-1}}}$$

A8	Ausführliche Lösung

$$5k\cdot\sqrt{\frac{1}{2k}}e^{-0,5}=5\cdot\sqrt{\frac{k}{2e}} \text{ für } k>0$$

$$5k\cdot\sqrt{\frac{1}{2k}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=5k\cdot\sqrt{\frac{1}{2k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}=5\cdot\sqrt{\frac{k^2}{2k}}\cdot\sqrt{\frac{1}{e}}$$

$$=5\cdot\sqrt{\frac{k^2}{2k}\cdot\frac{1}{e}}=5\cdot\sqrt{\frac{k}{2e}}$$

A9	Ausführliche Lösung
	$\sqrt[8]{200} = 200^{\frac{1}{8}} = 200^{0,125} \approx \underline{\underline{1,939227447}}$

A10	Ausführliche Lösung
	Würfelvolumen: $V = a \cdot a \cdot a = a^3$ Würfeloberfläche: $O = 6 \cdot a \cdot a = 6a^2$ 15 Liter $\triangleq 15\ dm^3$; $1\ dm = 10\ cm$ $V = 15\ dm^3 \Leftrightarrow a^3 = 15\ dm^3 \mid \sqrt[3]{\ }$ $\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{15}\ dm = 15^{\frac{1}{3}}\ dm$ $\Leftrightarrow a \approx 2,466\ dm = \underline{\underline{24,66\ cm}}$ $O = 6a^2 = 6 \cdot \left(15^{\frac{1}{3}}\ dm\right)^2 = 6 \cdot 15^{\frac{2}{3}}\ dm^2 \approx 36,4932\ dm^2$ $1\ dm^2 = (10\ cm)^2 = 100\ cm^2 \Rightarrow O \approx \underline{\underline{3649,32\ cm^2}}$ Der Würfel hat eine Kantenlänge von etwa 24,66 cm. Seine Oberfläche beträgt etwa 3649,32 cm^2.

A11	Ausführliche Lösung
	Zeit 5 Jahre, Kapital nach 5 Jahren $K_5 = 1,3K_0$. Zinseszinsformel: $K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$ mit p als Zinssatz. $1,3K_0 = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^5 \mid : K_0$ $\Leftrightarrow 1,3 = \left(1+\frac{p}{100}\right)^5 \mid \sqrt[5]{\ } \Leftrightarrow \sqrt[5]{1,3} = 1+\frac{p}{100} \mid -1$ $\Leftrightarrow 1,3^{\frac{1}{5}} - 1 = \frac{p}{100} \mid \cdot 100 \Leftrightarrow 100 \cdot \left(1,3^{\frac{1}{5}} - 1\right) = p$ $\Leftrightarrow p \approx \underline{\underline{5,39}}$ Der jährliche Zinssatz beträgt etwa 5,39%