Lösungen Potenzen und Wurzeln V

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse					
	a)	$\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$	b)	$\sqrt[4]{32} = 2\sqrt[4]{2}$	c)	$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25} = 5$
	d)	$\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{k^5} = k^3$	e)	$\sqrt[4]{25^3}\cdot\sqrt[4]{5^2} = 5^2$	f)	$\left(\sqrt[4]{6}\right)^8 = 36$

E2	Ergebnisse					
	a)	$\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{2}$	b)	$k : \sqrt[3]{k} = \sqrt[3]{k^2}$	c)	$\frac{1}{\sqrt{k}-1} = \frac{\sqrt{k}+1}{k-1}$

E3	Ergebnisse					
	a)	$\left(\sqrt{5}\right)^3 = 5^{\frac{3}{2}}$	b)	$\sqrt[3]{k} = k^{\frac{1}{3}}$	c)	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 4^{-\frac{1}{3}}$
	d)	$\sqrt[4]{k^3} = k^{\frac{3}{4}}$	e)	$\sqrt[3]{k^3+1} = \left(k^3+1\right)^{\frac{1}{3}}$	f)	$\sqrt[4]{k^2} : \sqrt[3]{k} = k^{\frac{1}{2}}\cdot k^{-\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{6}}$

E4	Ergebnisse					
	a)	$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5 = x^2\sqrt{x}$	b)	$a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(ab)^3}$	c)	$a^{-\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$
	d)	$\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^{25}}$	e)	$a^2\sqrt{a} + 4a\sqrt{a^3} + a^{2,5} = 6\sqrt{a^5}$	f)	$\frac{\sqrt[4]{ab^2}}{b} = \sqrt[4]{\frac{a}{b^2}}$
	g)	$\frac{1}{\sqrt{a^3}} + a^{-1,5} = \frac{2}{\sqrt{a^3}}$	h)	$\left(\sqrt{a}-\sqrt{a^3}\right) : \sqrt{a} = 1-a$	i)	$\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{2k} = k\sqrt[3]{2}$

E5	Ergebnisse			
	a)	$\left(x^2+2x+1\right)^{0,5} = x+1$	b)	$\left(9k^2+36\right)^{0,5} = 3\left(k^2+4\right)^{0,5}$
	c)	$3^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{(-3)^4}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$	d)	$4\cdot 2^{0,25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 4 = 8\cdot 8^{0,25} = 2^{3,75}$
	e)	$6\sqrt{a^3} + \sqrt{2a} = \sqrt{a}\left(6a+\sqrt{2}\right)$	f)	$\left(9k^4+12k^2+4\right)^{0,5} = 3k^2+2$

E6	Ergebnis
	$5^{-3,2} < 3^{-4,2} < 3^{-3,2} < 2^{-3,2} < 0,5^{2,4}$

E7	Ergebnis
	$\sqrt[4]{x^n} = x^{0,25n}$ falls $x \ge 0$ für $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R}$ für n gerade $\wedge\ n \in \mathbb{N}$

E8	Ergebnis
	$x^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist definiert für $x > 0 \Rightarrow$ alle Aussagen sind falsch. $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$ richtig sind a) und b) da $x^2 \geq 0$ $x^{-1,5} = \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ definiert für $x > 0$; richtig ist c)

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt{a})^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen :

A1	**Aufgabe**					
	Vereinfachen Sie					
	a)	$\sqrt[3]{24}$	b)	$\sqrt[4]{32}$	c)	$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$
	d)	$\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{k^5}$	e)	$\sqrt[4]{25^3}\cdot\sqrt[4]{5^2}$	f)	$\left(\sqrt[4]{6}\right)^8$

A1	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=\underline{\underline{2\cdot\sqrt[3]{3}}}$	b)	$\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{16\cdot 2}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=\underline{\underline{2\cdot\sqrt[4]{2}}}$

A1	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5\cdot 25}=\sqrt[3]{5^3}=\underline{\underline{5}}$	d)	$\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{k^5}=\sqrt[3]{k^9}=k^{\frac{9}{3}}=\underline{\underline{k^3}}$

A1	Ausführliche Lösungen			
	e)	$\sqrt[4]{25^3}\cdot\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[4]{5^6\cdot 5^2}=\sqrt[4]{5^8}=5^{\frac{8}{4}}$ $=\underline{\underline{5^2=25}}$	f)	$\left(\sqrt[4]{6}\right)^8=\sqrt[4]{6^8}=6^{\frac{8}{4}}$ $=\underline{\underline{6^2=36}}$

A2	**Aufgabe**					
	Machen Sie den Nenner rational					
	a)	$\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{2}}$	b)	$k:\sqrt[3]{k}$	c)	$\frac{1}{\sqrt{k}-1}$

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	$\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2^{\frac{2}{4}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}=\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{2}}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	$k:\sqrt[3]{k}=\frac{k}{\sqrt[3]{k}}=\frac{k^1\cdot k^{\frac{2}{3}}}{k^{\frac{1}{3}}\cdot k^{\frac{2}{3}}}=\frac{k\cdot\sqrt[3]{k^2}}{k}=\underline{\underline{\sqrt[3]{k^2}}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	c)	$\frac{1}{\sqrt{k}-1}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{k}+1\right)}{\left(\sqrt{k}-1\right)\left(\sqrt{k}+1\right)}=\frac{\sqrt{k}+1}{\left(\sqrt{k}\right)^2-1^2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{k}+1}{k-1}}}$

A3	**Aufgabe**					
	Schreiben Sie als Potenz.					
	a)	$\left(\sqrt{5}\right)^3$	b)	$\sqrt[3]{k}$	c)	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$
	d)	$\sqrt[4]{k^3}$	e)	$\sqrt[3]{k^3+1}$	f)	$\sqrt[4]{k^2}:\sqrt[3]{k}$

A3	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\left(\sqrt{5}\right)^3 = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \underline{\underline{5^{\frac{3}{2}}}}$	b)	$\sqrt[3]{k} = \underline{\underline{k^{\frac{1}{3}}}}$

A3	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{4^{-\frac{1}{3}}}}$	d)	$\sqrt[4]{k^3} = \underline{\underline{k^{\frac{3}{4}}}}$ wegen $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

A3	Ausführliche Lösungen			
	e)	$\sqrt[3]{k^3+1} = \underline{\underline{\left(k^3+1\right)^{\frac{1}{3}}}}$	f)	$\sqrt[4]{k^2}:\sqrt[3]{k} = k^{\frac{1}{2}}\cdot k^{-\frac{1}{3}} = k^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}} = \underline{\underline{k^{\frac{1}{6}}}}$

A4	**Aufgabe**					
	Vereinfachen Sie und schreiben Sie das Ergebnis als Wurzel					
	a)	$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5$	b)	$a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}$	c)	$a^{-\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{3}}$
	d)	$\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^3}$	e)	$a^2\sqrt{a}+4a\sqrt{a^3}+a^{2,5}$	f)	$\frac{\sqrt[4]{ab^2}}{b}$
	g)	$\frac{1}{\sqrt{a^3}}+a^{-1,5}$	h)	$\left(\sqrt{a}-\sqrt{a^3}\right):\sqrt{a}$	i)	$\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{2k}$

A4	Ausführliche Lösung	
	a)	$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5 = x^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = \underline{\underline{x^2\sqrt{x}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	b)	$a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}} = (ab)^{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{(ab)^3} = ab\sqrt{ab}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	c)	$a^{-\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{3}{6}}\cdot a^{-\frac{2}{6}} = a^{-\frac{5}{6}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	d)	$\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{16}{12}}\cdot a^{\frac{9}{12}}=a^{\frac{16}{12}+\frac{9}{12}}=a^{\frac{25}{12}}=\underline{\underline{\sqrt[12]{a^{25}}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	e)	$a^2\sqrt{a}+4a\sqrt{a^3}+a^{2,5}=a^2\cdot a^{\frac{1}{2}}+4a\cdot a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{5}{2}}=a^{\frac{5}{2}}+4a^{\frac{5}{2}}+a^{\frac{5}{2}}=\underline{\underline{6a^{\frac{5}{2}}=6\sqrt{a^5}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	f)	$\frac{\sqrt[4]{ab^2}}{b}=\sqrt[4]{\frac{ab^2}{b^4}}=\underline{\underline{\sqrt[4]{\frac{a}{b^2}}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	g)	$\frac{1}{\sqrt{a^3}}+a^{-1,5}=a^{-\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=2\cdot a^{-\frac{3}{2}}=\underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{a^3}}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	h)	$\left(\sqrt{a}-\sqrt{a^3}\right):\sqrt{a}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}}=1-\sqrt{a^2}=\underline{\underline{1-a}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	i)	$\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{2k}=\sqrt[3]{2k^3}=\underline{\underline{k\cdot\sqrt[3]{2}}}$

<table>
<tr><td rowspan="4">A5</td><td colspan="6">Aufgabe</td></tr>
<tr><td colspan="6">Vereinfachen Sie</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>$\left(x^2+2x+1\right)^{0,5}$</td><td>b)</td><td>$\left(9k^2+36\right)^{0,5}$</td><td>c)</td><td>$3^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{(-3)^4}\cdot\frac{1}{9}$</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>$4\cdot 2^{0,25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 4$</td><td>e)</td><td>$6\sqrt{a^3}+\sqrt{2a}$</td><td>f)</td><td>$\left(9k^4+12k^2+4\right)^{0,5}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">A5</td><td colspan="4">Ausführliche Lösungen</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>$\left(x^2+2x+1\right)^{0,5}=\left[(x+1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$
$=\underline{\underline{x+1}}$</td><td>b)</td><td>$\left(9k^2+36\right)^{0,5}=\left[9\left(k^2+4\right)\right]^{\frac{1}{2}}$
$=\underline{\underline{3\left(k^2+4\right)^{\frac{1}{2}}}}$</td></tr>
</table>

A5	Ausführliche Lösungen			
	c)	$3^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{(-3)^4} \cdot \frac{1}{9} = 3^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{3^4} \cdot \frac{1}{9}$ $= 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{1}{9}$ $= 3 \cdot \frac{1}{9} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$	d)	$4 \cdot 2^{0,25} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4 = 2^2 \cdot 2^{0,25} \cdot 2^{-0,5} \cdot 2^2$ $= 2^{2+0,25-0,5+2}$ $= \underline{\underline{2^{3,75}}}$

A5	Ausführliche Lösungen			
	e)	$6\sqrt{a^3} + \sqrt{2a} = 6\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{a}$ $= \underline{\underline{\sqrt{a}\left(6a + \sqrt{2}\right)}}$	f)	$\left(9k^4 + 12k^2 + 4\right)^{0,5} = \left[\left(3k^2 + 2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ $= \underline{\underline{3k^2 + 2}}$

A6	Aufgabe				
	Ordnen Sie ohne Verwendung eines Taschenrechners der Größe nach				
	$0,5^{2,4}$	$3^{-3,2}$	$2^{-3,2}$	$3^{-4,2}$	$5^{-3,2}$

A6	Ausführliche Lösung
	$0,5^{2,4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2,4} = \frac{1}{2^{2,4}} \quad 2^{-3,2} = \frac{1}{2^{3,2}} \quad 3^{-3,2} = \frac{1}{3^{3,2}} \quad 3^{-4,2} = \frac{1}{3^{4,2}} \quad 5^{-3,2} = \frac{1}{5^{3,2}}$ folgende Relationen gelten: $\frac{1}{5^{3,2}} < \frac{1}{3^{4,2}} < \frac{1}{3^{3,2}} < \frac{1}{2^{3,2}} < \frac{1}{2^{2,4}}$ oder : $\underline{\underline{5^{-3,2} < 3^{-4,2} < 3^{-3,2} < 2^{-3,2} < 0,5^{2,4}}}$

A 7	**Aufgabe**	
	Unter welchen Bedingungen für x und n gilt:	$\sqrt[4]{x^n} = x^{0,25n}$?

A7	Ausführliche Lösung
	$\sqrt[4]{x^n} = x^{0,25n} = x^{\frac{1}{4}\cdot n} = x^{\frac{n}{4}} = \sqrt[4]{x^n}$ Falls $x \geq 0$ ist, darf der Exponent auch ungerade sein $\underline{\underline{\Rightarrow x \geq 0 \text{ und } n \in \mathbb{N}}}$ Falls $x \in \mathbb{R}$ ist, muss der Exponent n gerade sein, denn aus einer negativen Zahl lässt sich keine Wurzel ziehen. $\underline{\underline{\Rightarrow x \in \mathbb{R} \text{ und n gerade und } n \in \mathbb{N}}}$

A8	**Aufgabe**			
	Welche der folgenden Aussagen sind wahr oder falsch. Begründen Sie			
	$x^{-0,5}$ ist	a) für alle $x \geq 0$ definiert	b) für alle $x \in \mathbb{N}$ definiert	c) gleich $\frac{1}{x^2}$
	$x^{\frac{2}{5}}$ ist	a) für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert	b) die 5. Wurzel von x^2	c) die Quadratwurzel von x^5
	$x^{-1,5}$ ist	a) für alle $x \in \mathbb{Q}$ definiert	b) gleich $\frac{x^2}{\sqrt{x}}$	c) gleich $\frac{\sqrt{x}}{x^2}$

A8 Ausführliche Lösung

$x^{-0,5} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

a) "für alle $x \geq 0$ definiert" ist falsch, denn für $x = 0$ ist $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nicht definiert.

b) "für alle $x \in \mathbb{N}$ definiert" ist falsch, denn $0 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ siehe a).

c) "ist gleich $\frac{1}{x^2}$" ist falsch, denn $\frac{1}{\sqrt{x}} \neq \frac{1}{x^2}$.

A8 Ausführliche Lösung

$x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$

a) "für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert" ist richtig, da der Radikant immer wegen x^2 positiv ist.

b) "die 5. Wurzel von x^2" ist richtig, da $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$.

c) "die Quadratwurzel von x^5" ist falsch, da $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2} \neq \sqrt{x^5}$.

A8 Ausführliche Lösung

$x^{-1,5} = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

a) "ist für alle $x \in \mathbb{Q}$ definiert" ist falsch, da $x > 0$ sein muss.

b) "gleich $\frac{x^2}{\sqrt{x}}$" ist falsch, denn $\frac{1}{\sqrt{x^3}} \neq \frac{x^2}{\sqrt{x}}$.

c) "gleich $\frac{\sqrt{x}}{x^2}$" ist richtig, denn $\frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1\sqrt{x^3}}{x^3} = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{x^3} = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$.