Lösungen Potenzen und Wurzeln V

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse					
	a)	$\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$	b)	$\sqrt[4]{32}=2\sqrt[4]{2}$	c)	$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}=5$
	d)	$\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{k^5}=k^3$	e)	$\sqrt[4]{25^3}\cdot\sqrt[4]{5^2}=5^2$	f)	$\left(\sqrt[4]{6}\right)^8=36$

E2	Ergebnisse					
	a)	$\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{2}$	b)	$k:\sqrt[3]{k}=\sqrt[3]{k^2}$	c)	$\dfrac{1}{\sqrt{k}-1}=\dfrac{\sqrt{k}+1}{k-1}$

E3	Ergebnisse					
	a)	$\left(\sqrt{5}\right)^3=5^{\frac{3}{2}}$	b)	$\sqrt[3]{k}=k^{\frac{1}{3}}$	c)	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}=4^{-\frac{1}{3}}$
	d)	$\sqrt[4]{k^3}=k^{\frac{3}{4}}$	e)	$\sqrt[3]{k^3+1}=\left(k^3+1\right)^{\frac{1}{3}}$	f)	$\sqrt[4]{k^2}:\sqrt[3]{k}=k^{\frac{1}{2}}\cdot k^{-\frac{1}{3}}=k^{\frac{1}{6}}$

E4	Ergebnisse					
	a)	$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5=x^2\sqrt{x}$	b)	$a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}=\sqrt{(ab)^3}$	c)	$a^{-\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$
	d)	$\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[12]{a^{25}}$	e)	$a^2\sqrt{a}+4a\sqrt{a^3}+a^{2,5}=6\sqrt{a^5}$	f)	$\dfrac{\sqrt[4]{ab^2}}{b}=\sqrt[4]{\dfrac{a}{b^2}}$
	g)	$\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}+a^{-1,5}=\dfrac{2}{\sqrt{a^3}}$	h)	$\left(\sqrt{a}-\sqrt{a^3}\right):\sqrt{a}=1-a$	i)	$\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{2k}=k\sqrt[3]{2}$

E5	Ergebnisse			
	a)	$\left(x^2+2x+1\right)^{0,5}=x+1$	b)	$\left(9k^2+36\right)^{0,5}=3\left(k^2+4\right)^{0,5}$
	c)	$3^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{(-3)^4}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$	d)	$4\cdot2^{0,25}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot4=8\cdot8^{0,25}=2^{3,75}$
	e)	$6\sqrt{a^3}+\sqrt{2a}=\sqrt{a}\left(6a+\sqrt{2}\right)$	f)	$\left(9k^4+12k^2+4\right)^{0,5}=3k^2+2$

E6	Ergebnis
	$5^{-3,2}\quad<\quad3^{-4,2}\quad<\quad3^{-3,2}\quad<\quad2^{-3,2}\quad<\quad0,5^{2,4}$

E7	Ergebnis
	$\sqrt[4]{x^n}=x^{0,25n}$ falls $x\geq0$ für $n\in\mathbb{N}$; $x\in\mathbb{R}$ für n gerade $\wedge\ n\in\mathbb{N}$

E8	Ergebnis
	$x^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ist definiert für $x > 0 \Rightarrow$ alle Aussagen sind falsch. $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$ richtig sind a) und b) da $x^2 \geq 0$ $x^{-1,5} = \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ definiert für $x > 0$; richtig ist c)

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen :

A1	Ausführliche Lösungen		
a)	$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=\underline{\underline{2\cdot\sqrt[3]{3}}}$	b)	$\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{16\cdot 2}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2}=\underline{\underline{2\cdot\sqrt[4]{2}}}$

A1	Ausführliche Lösungen		
c)	$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5\cdot 25}=\sqrt[3]{5^3}=\underline{\underline{5}}$	d)	$\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{k^5}=\sqrt[3]{k^9}=k^{\frac{9}{3}}=\underline{\underline{k^3}}$

A1	Ausführliche Lösungen		
e)	$\sqrt[4]{25^3}\cdot\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[4]{5^6\cdot 5^2}=\sqrt[4]{5^8}=5^{\frac{8}{4}}=\underline{\underline{5^2=25}}$	f)	$\left(\sqrt[4]{6}\right)^8=\sqrt[4]{6^8}=6^{\frac{8}{4}}=\underline{\underline{6^2=36}}$

A2	Ausführliche Lösung
a)	$\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2^{\frac{2}{4}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}=\frac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}{2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}{2}}}$

A2	Ausführliche Lösung
b)	$k:\sqrt[3]{k}=\frac{k}{\sqrt[3]{k}}=\frac{k^1\cdot k^{\frac{2}{3}}}{k^{\frac{1}{3}}\cdot k^{\frac{2}{3}}}=\frac{k\cdot\sqrt[3]{k^2}}{k}=\underline{\underline{\sqrt[3]{k^2}}}$

A2	Ausführliche Lösung
c)	$\frac{1}{\sqrt{k}-1}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{k}+1\right)}{\left(\sqrt{k}-1\right)\left(\sqrt{k}+1\right)}=\frac{\sqrt{k}+1}{\left(\sqrt{k}\right)^2-1^2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{k}+1}{k-1}}}$

A3	Ausführliche Lösungen		
a)	$\left(\sqrt{5}\right)^3=\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3=\underline{\underline{5^{\frac{3}{2}}}}$	b)	$\sqrt[3]{k}=\underline{\underline{k^{\frac{1}{3}}}}$

A3	Ausführliche Lösungen		
c)	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{3}}}=\underline{\underline{4^{-\frac{1}{3}}}}$	d)	$\sqrt[4]{k^3}=\underline{\underline{k^{\frac{3}{4}}}}$ wegen $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

A3	Ausführliche Lösungen		
e)	$\sqrt[3]{k^3+1}=\underline{\underline{\left(k^3+1\right)^{\frac{1}{3}}}}$	f)	$\sqrt[4]{k^2}:\sqrt[3]{k}=k^{\frac{1}{2}}\cdot k^{-\frac{1}{3}}=k^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}=\underline{\underline{k^{\frac{1}{6}}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	a)	$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5 = x^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}} = x^{2+\frac{1}{2}} = \underline{\underline{x^2\sqrt{x}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	b)	$a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}} = (ab)^{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{(ab)^3} = ab\sqrt{ab}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	c)	$a^{-\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{3}{6}}\cdot a^{-\frac{2}{6}} = a^{-\frac{5}{6}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	d)	$\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{16}{12}}\cdot a^{\frac{9}{12}} = a^{\frac{16}{12}+\frac{9}{12}} = a^{\frac{25}{12}} = \underline{\underline{\sqrt[12]{a^{25}}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	e)	$a^2\sqrt{a} + 4a\sqrt{a^3} + a^{2,5} = a^2\cdot a^{\frac{1}{2}} + 4a\cdot a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{5}{2}} + 4a^{\frac{5}{2}} + a^{\frac{5}{2}} = \underline{\underline{6a^{\frac{5}{2}} = 6\sqrt{a^5}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	f)	$\frac{\sqrt[4]{ab^2}}{b} = \sqrt[4]{\frac{ab^2}{b^4}} = \underline{\underline{\sqrt[4]{\frac{a}{b^2}}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	g)	$\frac{1}{\sqrt{a^3}} + a^{-1,5} = a^{-\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = 2\cdot a^{-\frac{3}{2}} = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{a^3}}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	h)	$\left(\sqrt{a} - \sqrt{a^3}\right) : \sqrt{a} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}} = 1 - \sqrt{a^2} = \underline{\underline{1-a}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	i)	$\sqrt[3]{k^2}\cdot\sqrt[3]{2k} = \sqrt[3]{2k^3} = \underline{\underline{k\cdot\sqrt[3]{2}}}$

A5	Ausführliche Lösungen		
a)	$\left(x^2+2x+1\right)^{0,5}=\left[\left(x+1\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ $=\underline{\underline{x+1}}$	b)	$\left(9k^2+36\right)^{0,5}=\left[9\left(k^2+4\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ $=\underline{\underline{3\left(k^2+4\right)^{\frac{1}{2}}}}$

A5	Ausführliche Lösungen		
c)	$3^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{(-3)^4}\cdot\frac{1}{9}=3^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{3^4}\cdot\frac{1}{9}$ $=3^{-\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{9}$ $=3\cdot\frac{1}{9}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$	d)	$4\cdot2^{0,25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot4=2^2\cdot2^{0,25}\cdot2^{-0,5}\cdot2^2$ $=2^{2+0,25-0,5+2}$ $=\underline{\underline{2^{3,75}}}$

A5	Ausführliche Lösungen		
e)	$6\sqrt{a^3}+\sqrt{2a}=6\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}$ $=\underline{\underline{\sqrt{a}\left(6a+\sqrt{2}\right)}}$	f)	$\left(9k^4+12k^2+4\right)^{0,5}=\left[\left(3k^2+2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ $=\underline{\underline{3k^2+2}}$

A6	Ausführliche Lösung
	$0,5^{2,4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2,4}=\frac{1}{2^{2,4}}\quad 2^{-3,2}=\frac{1}{2^{3,2}}\quad 3^{-3,2}=\frac{1}{3^{3,2}}\quad 3^{-4,2}=\frac{1}{3^{4,2}}\quad 5^{-3,2}=\frac{1}{5^{3,2}}$ folgende Relationen gelten: $\frac{1}{5^{3,2}}<\frac{1}{3^{4,2}}<\frac{1}{3^{3,2}}<\frac{1}{2^{3,2}}<\frac{1}{2^{2,4}}$ oder : $\underline{\underline{5^{-3,2}<3^{-4,2}<3^{-3,2}<2^{-3,2}<0,5^{2,4}}}$

A7	Ausführliche Lösung
	$\sqrt[4]{x^n}=x^{0,25n}=x^{\frac{1}{4}\cdot n}=x^{\frac{n}{4}}=\sqrt[4]{x^n}$ Falls $x\geq0$ ist, darf der Exponent auch ungerade sein $\underline{\underline{\Rightarrow x\geq0 \text{ und } n\in\mathbb{N}}}$ Falls $x\in\mathbb{R}$ ist, muss der Exponent n gerade sein, denn aus einer negativen Zahl lässt sich keine Wurzel ziehen. $\underline{\underline{\Rightarrow x\in\mathbb{R} \text{ und n gerade und } n\in\mathbb{N}}}$

A8	Ausführliche Lösung
	$x^{-0,5} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ a) "für alle $x \geq 0$ definiert" ist falsch, denn für $x = 0$ ist $\frac{1}{\sqrt{x}}$ nicht definiert. b) "für alle $x \in \mathbb{N}$ definiert" ist falsch, denn $0 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ siehe a). c) "ist gleich $\frac{1}{x^2}$" ist falsch, denn $\frac{1}{\sqrt{x}} \neq \frac{1}{x^2}$.

A8	Ausführliche Lösung
	$x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$ a) "für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert" ist richtig, da der Radikant immer wegen x^2 positiv ist. b) "die 5. Wurzel von x^2" ist richtig, da $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$. c) "die Quadratwurzel von x^5" ist falsch, da $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2} \neq \sqrt{x^5}$.

A8	Ausführliche Lösung
	$x^{-1,5} = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ a) "ist für alle $x \in \mathbb{Q}$ definiert" ist falsch, da $x > 0$ sein muss. b) "gleich $\frac{x^2}{\sqrt{x}}$" ist falsch, denn $\frac{1}{\sqrt{x^3}} \neq \frac{x^2}{\sqrt{x}}$. c) "gleich $\frac{\sqrt{x}}{x^2}$" ist richtig, denn $\frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1\sqrt{x^3}}{x^3} = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{x^3} = \frac{\sqrt{x}}{x^2}$.