Lösungen Potenzen und Wurzeln IV

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse					
	a)	$\sqrt{8}-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}$	b)	$\sqrt{18}-3\sqrt{8}=-3\sqrt{2}$	c)	$\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{25}=3\sqrt{5}-5$

E2	Ergebnisse	
	a)	$\left(\sqrt{5}\right)^3+3\sqrt{5^2}-\left(4\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}\sqrt{5^3}=5\sqrt{5}-40$
	b)	$\sqrt{3^4}+\left(-2\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3^2}\right)^3-5\sqrt{3}\sqrt{3^3}=135$

E3	Ergebnisse			
	a)	$\left(\sqrt{2}\right)^3+\left(\sqrt{2}\right)^4+\left(\sqrt{2}\right)^5=6\sqrt{2}+4$	b)	$4\sqrt{2}+3\sqrt{0,5}-2\sqrt{4,5}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$
	c)	$\left(\sqrt{k}\right)^4+\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}\right)^2=k^2+0,5k$	d)	$\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=2$
	e)	$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=-1$	f)	$\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)^2=15-4\sqrt{14}$

E4	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x^5}=x^4$	b)	$\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^5}=a^4\sqrt{a}$
	c)	$\sqrt{\frac{2x}{3y}}\cdot\sqrt{\frac{4x}{3y^2}}=\frac{2x}{3y}\cdot\sqrt{\frac{2}{y}}$	d)	$\left(\sqrt{k}\right)^3+k\sqrt{k}-\sqrt{4k^3}=0$
	e)	$\left(\sqrt{2k}\right)^3-k+\left(2\sqrt{k}\right)^2-\sqrt{2k^3}=k\sqrt{2k}+3k$	f)	$\sqrt{(1,5k)^2}-0,5k=k$

E5	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{4k^2+8k+4}=2(k+1)$	b)	$\frac{\sqrt{3k^2-3}}{\sqrt{k-1}}=\sqrt{3(k+1)}$
	c)	$\frac{\sqrt{k^2-16}}{k-4}=\sqrt{\frac{k+4}{k-4}}$	d)	$\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}=\sqrt{x^2-y^2}$
	e)	$\frac{\left(\sqrt{2k}\right)^5+\left(2\sqrt{k}\right)^3}{4\sqrt{k}}=k^2\sqrt{2}+2k$	f)	$\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)^2=x^2y+2xy\sqrt{xy}+xy^2$

E6	Ergebnisse	
	a)	$y=\frac{1}{2k}x^4-x^2+3k$ für $x=\sqrt{k}\Rightarrow y=\frac{5k}{2}$
	b)	$y=\frac{2}{3}x^3-kx+5k\sqrt{k}$ für $x=-\frac{1}{2}\sqrt{k}\Rightarrow y=\frac{65}{12}k\sqrt{k}$

E7	Ergebnisse					
	a)	$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$	b)	$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -\left(\sqrt{2}+2\right)$	c)	$\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
	d)	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{15}$	e)	$\frac{k+\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{k}+1\right)$	f)	$\frac{k}{\sqrt{k}-1} = \frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{k-1}$

E8	Ergebnis
	$\sqrt{u^2+1}$ liefert für $u>1$ den kleinsten Wert, denn $u^2+1<u(u+1)=u^2\left(1+\frac{1}{u}\right)$

E9	Ergebnis
	Diagonale c: $c=\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen :

A1	Ausführliche Lösung
	a) $\sqrt{8}-3\sqrt{2}=\sqrt{4\cdot 2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\underline{\underline{-\sqrt{2}}}$

A1	Ausführliche Lösung
	b) $\sqrt{18}-3\sqrt{8}=\sqrt{9\cdot 2}-3\sqrt{4\cdot 2}=3\sqrt{2}-6\sqrt{2}=\underline{\underline{-3\sqrt{2}}}$

A1	Ausführliche Lösung
	c) $\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{25}=\sqrt{5}+\sqrt{4\cdot 5}-5=\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5=\underline{\underline{3\sqrt{5}-5}}$

A2	Ausführliche Lösung
	a) $\left(\sqrt{5}\right)^3+3\sqrt{5^2}-\left(4\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}\sqrt{5^3}=5\sqrt{5}+3\cdot 5-16\cdot 5+25$ $=5\sqrt{5}+15-80+25=\underline{\underline{5\sqrt{5}-40}}$

A2	Ausführliche Lösung
	b) $\sqrt{3^4}+\left(-2\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3^2}\right)^3-5\sqrt{3}\sqrt{3^3}=3^{\frac{4}{2}}+16\cdot 3^{\frac{4}{2}}+3^{\frac{6}{2}}-5\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}$ $=3^2+16\cdot 3^2+3^3-5\cdot 3^2$ $=9+16\cdot 9+27-45=\underline{\underline{135}}$

A3	Ausführliche Lösungen	
	a) $\left(\sqrt{2}\right)^3+\left(\sqrt{2}\right)^4+\left(\sqrt{2}\right)^5$ $=2\sqrt{2}+2^2+2^2\sqrt{2}$ $=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+4$ $=\underline{\underline{6\sqrt{2}+4}}$	b) $4\sqrt{2}+3\sqrt{0,5}-2\sqrt{4,5}$ $=4\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{9}{2}}$ $=4\sqrt{2}+3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}$ $=4\sqrt{2}+3\cdot\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}-2\cdot\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$ $=4\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\underline{\underline{\frac{5}{2}\sqrt{2}}}$

A3	Ausführliche Lösungen	
	c) $\left(\sqrt{k}\right)^4+\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}\right)^2=k^2+\frac{1}{2}k$ $=\underline{\underline{k^2+0,5k}}$	d) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=\left(\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$ $=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$ $=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\underline{\underline{2}}$

A3	Ausführliche Lösungen			
	e)	$\underbrace{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}_{\text{3. bin. Formel}}=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2$ $=2-3=\underline{\underline{-1}}$	f)	$\underbrace{\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)^2}_{\text{2. bin. Formel}}=8-2\sqrt{8}\cdot\sqrt{7}+7$ $=\underline{\underline{15-4\sqrt{14}}}$

A4	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x^5}=\sqrt{x^3\cdot x^5}$ $=\sqrt{x^8}$ $=\underline{\underline{x^4}}$	b)	$\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^5}=\sqrt{a^3\cdot a\cdot a^5}$ $=\sqrt{a^8\cdot a}$ $=\underline{\underline{a^4\sqrt{a}}}$

A4	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\sqrt{\frac{2x}{3y}}\cdot\sqrt{\frac{4x}{3y^2}}=\sqrt{\frac{2x\cdot 4y}{3y\cdot 3y^2}}$ $=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x^2}{y^3}}$ $=\underline{\underline{\frac{2x}{3y}\cdot\sqrt{\frac{2}{y}}}}$	d)	$\left(\sqrt{k}\right)^3+k\sqrt{k}-\sqrt{4k^3}$ $=k\sqrt{k}+k\sqrt{k}-2k\sqrt{k}$ $=\underline{\underline{0}}$

A4	Ausführliche Lösungen			
	e)	$\left(\sqrt{2k}\right)^3-k+\left(2\sqrt{k}\right)^2-\sqrt{2k^3}$ $=2k\sqrt{2k}-k+4k-k\sqrt{2k}$ $=\underline{\underline{k\sqrt{2k}+3k}}$	f)	$\sqrt{(1{,}5k)^2}-0{,}5k$ $=1{,}5k-0{,}5k$ $=\underline{\underline{k}}$

A5	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\sqrt{4k^2+8k+4}=\sqrt{4\left(k^2+2k+1\right)}$ $=2\cdot\sqrt{(k+1)^2}$ $=\underline{\underline{2(k+1)}}$	b)	$\frac{\sqrt{3k^2-3}}{\sqrt{k-1}}=\sqrt{\frac{3\left(k^2-1\right)}{k-1}}$ $=\sqrt{\frac{3(k-1)(k+1)}{k-1}}$ $=\underline{\underline{\sqrt{3(k+1)}}}$

A5 Ausführliche Lösungen

c)

$$\frac{\sqrt{k^2-16}}{k-4}=\sqrt{\frac{k^2-16}{(k-4)^2}}=\sqrt{\frac{(k-4)(k+4)}{(k-4)^2}}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{k+4}{k-4}}}}$$

d)

$$\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}=\sqrt{(x-y)(x+y)}=\underline{\underline{\sqrt{x^2-y^2}}}$$

A5 Ausführliche Lösungen

e)

$$\frac{\left(\sqrt{2k}\right)^5+\left(2\sqrt{k}\right)^3}{4\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{k^5}+8\sqrt{k^3}}{4\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{k^5}\cdot\sqrt{k}+8\sqrt{k^3}\cdot\sqrt{k}}{4\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}}=\frac{4\sqrt{2}\cdot k^3+8k^2}{4k}=\underline{\underline{k^2\sqrt{2}+2k}}$$

f)

$$\underbrace{\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)^2}_{\text{1. bin. Formel}}=\left(x\sqrt{y}\right)^2+2x\sqrt{y}\cdot y\sqrt{x}+\left(y\sqrt{x}\right)^2=\underline{\underline{x^2y+2xy\sqrt{xy}+xy^2}}$$

A6 Ausführliche Lösung

a)

$y=\frac{1}{2k}x^4-x^2+3k$ mit $x=\sqrt{k}$ wird:

$$y=\frac{1}{2k}\left(\sqrt{k}\right)^4-\left(\sqrt{k}\right)^2+3k=\frac{1}{2k}\cdot k^2-k+3k=\frac{1}{2}k+2k=\underline{\underline{\frac{5}{2}k}}$$

A6 Ausführliche Lösung

b)

$y=\frac{2}{3}x^3-kx+5k\sqrt{k}$ mit $x=-\frac{1}{2}\sqrt{k}$ wird:

$$y=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)^3-k\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)+5k\sqrt{k}=-\frac{1}{12}k\sqrt{k}+\frac{1}{2}k\sqrt{k}+5k\sqrt{k}$$

$$=\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+5\right)k\sqrt{k}=\left(-\frac{1}{12}+\frac{6}{12}+\frac{60}{12}\right)k\sqrt{k}=\underline{\underline{\frac{65}{12}k\sqrt{k}}}$$

A7 Ausführliche Lösungen

a)

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3}=\underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

b)

$$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}+2}{1-2}=\frac{\sqrt{2}+2}{-1}=\underline{\underline{-\left(\sqrt{2}+2\right)}}$$

A7	Ausführliche Lösungen	
	c) $\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{12}} &= \frac{3\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}}\\ &= \frac{3\cdot\sqrt{4\cdot 3}}{12}\\ &= \frac{3\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{12}\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{3}}}\end{aligned}$	d) $\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{5-2\cdot\sqrt{15}+3}{5-3}\\ &= \frac{8-2\cdot\sqrt{15}}{2}\\ &= \underline{\underline{4-\sqrt{15}}}\end{aligned}$

A7	Ausführliche Lösungen	
	e) $\begin{aligned}\frac{k+\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} &= \frac{\left(k+\sqrt{k}\right)\sqrt{k}}{2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}}\\ &= \frac{k\sqrt{k}+k}{2k}\\ &= \frac{\sqrt{k}}{2}+\frac{1}{2}\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}+1\right)}}\end{aligned}$	f) $\begin{aligned}\frac{k}{\sqrt{k}-1} &= \frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{\left(\sqrt{k}-1\right)\left(\sqrt{k}+1\right)}\\ &= \frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{\left(\sqrt{k}\right)^2-1^2}\\ &= \underline{\underline{\frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{k-1}}}\end{aligned}$

A8	Ausführliche Lösung
	$(1)\ \sqrt{u^2+1} \qquad (2)\ \sqrt{u(u+1)} \qquad (3)\ \sqrt{u^2\left(1+\frac{1}{u}\right)}$ Bei (2) und (3) wird der Term unter der Wurzel ausmultipliziert. $(2)\ \sqrt{u^2+u} \qquad (3)\ \sqrt{u^2+u}$ Damit sind (2) und (3) gleichwertig. Zu vergleichen sind (1) und (2). $\sqrt{u^2+1} < \sqrt{u^2+u}$ für $u > 1$ Damit liefert $\sqrt{u^2+1}$ den kleinsten Wert.

A9	Ausführliche Lösung
	Rechteckseiten: $a = 2$ und $b = \sqrt{2}$ Nach dem Satz vom Pythagoras gilt für die Diagonale eines Rechtecks: $d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+2} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$