

Lösungen Potenzen und Wurzeln III

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27k} = 9\sqrt{k}$	b) $(3\sqrt{a} + x\sqrt{a})\sqrt{a} = a(3 + x)$
	c) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = 8 - 2\sqrt{15}$	d) $(\sqrt{50} + \sqrt{18}) : \sqrt{2} = 8$
E2	Ergebnisse	
	a) $(\sqrt{3x} - \sqrt{12x}) : \sqrt{x} = -\sqrt{3}$	b) $(e^{0,5} - e^{-0,5})\sqrt{2e} = (e-1)\sqrt{2}$
	c) $(0,5x^{0,5})^3 + 3x\sqrt{x} = \frac{25}{8}x\sqrt{x}$	d) $0,5e\sqrt{e^{-2}} + 2e = \frac{1}{2} + 2e$
E3	Ergebnisse	
	a) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$	b) $3\sqrt{7} - \sqrt{112} = -\sqrt{7}$
	c) $\sqrt{8x^2} + \frac{x}{2}\sqrt{2} = 2,5x\sqrt{2}$	d) $\sqrt{a^7} - \sqrt{9a^3} = (a^3 - 3a)\sqrt{a}$
E4	Ergebnisse	
	a) $\sqrt{8k^2 - 16k + 8} = 2(k-1)\sqrt{2}$	b) $(1 + \sqrt{k})^2 = k + 2\sqrt{k} + 1$
	c) $(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})^2 = a + 4\sqrt{ab} + 4b$	d) $\sqrt{0,25k} - \sqrt{\frac{k}{25}} + 3\sqrt{k} = 3,3\sqrt{k}$
E5	Ergebnisse	
	a) $(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2}) = x - 2$	
	b) $\sqrt{xy^2} - 5\sqrt{x^2y} + 8x\sqrt{y} - 10y\sqrt{x} = 3(x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x})$	
E6	Ergebnisse	
	a) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$	b) $\frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
	c) $\frac{1 + \sqrt{k}}{1 - \sqrt{k}} = \frac{1 + 2\sqrt{k} + k}{1 - k}$	d) $\frac{k}{\sqrt{5k} - \sqrt{3k}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5k} + \sqrt{3k})$
	e) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}{x-1}$	f) $\sqrt{a} + 1 + a - \frac{a}{\sqrt{a}} = 1 + a$

E7	Ergebnisse
a)	$\frac{1}{9k}(\sqrt{k})^5 + \frac{1}{9}(\sqrt{k})^3 + \frac{3}{2}k\sqrt{k} = \frac{31}{18}k\sqrt{k}$
b)	$-\frac{1}{2k}\left[(-\sqrt{k})^4 + k(-\sqrt{k})^2\right] = -k$
c)	$-\frac{k^2}{144} \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{k}}\right)^3 + \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{k}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{k}$
d)	$\frac{1}{k^2}(\sqrt{0,5k})^3 - \frac{3}{2k}(\sqrt{0,5k})^2 + 2 = \frac{\sqrt{2k}}{4k} + \frac{5}{4}$

E8	Ergebnisse
a)	$\sqrt{8} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$
b)	$\sqrt{18} - 3\sqrt{8} = -3\sqrt{2}$
c)	$\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{25} = 3\sqrt{5} - 5$

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt{a})^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen :

A1	Ausführliche Lösungen	
	a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27k} = \sqrt{3 \cdot 27k}$ $= \sqrt{3^4 k}$ $= 3^2 \sqrt{k}$ $= \underline{\underline{9\sqrt{k}}}$	b) $(3\sqrt{a} + x\sqrt{a})\sqrt{a} = 3\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} + x\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$ $= 3a + x \cdot a$ $= \underline{\underline{a(3+x)}}$

A1	Ausführliche Lösungen	
	c) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$ $= 3 - 2\sqrt{15} + 5$ $= \underline{\underline{8 - 2\sqrt{15}}}$	d) $(\sqrt{50} + \sqrt{18}) : \sqrt{2} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ $= \sqrt{\frac{50}{2}} + \sqrt{\frac{18}{2}}$ $= \sqrt{25} + \sqrt{9}$ $= 5 + 3 = \underline{\underline{8}}$

A2	Ausführliche Lösungen	
	a) $(\sqrt{3x} - \sqrt{12x}) : \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{12x}}{\sqrt{x}}$ $= \sqrt{\frac{3x}{x}} - \sqrt{\frac{12x}{x}}$ $= \sqrt{3} - \sqrt{12}$ $= \sqrt{3} - \sqrt{4 \cdot 3}$ $= \sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ $= \underline{\underline{-\sqrt{3}}}$	b) $(e^{0,5} - e^{-0,5})\sqrt{2e} = \left(\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)\sqrt{2e}$ $= \sqrt{e} \cdot \sqrt{2e} - \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{e}}$ $= \sqrt{2e \cdot e} - \sqrt{\frac{2e}{e}}$ $= \sqrt{2e^2} - \sqrt{2}$ $= \sqrt{2} \cdot e - \sqrt{2}$ $= \underline{\underline{\sqrt{2}(e-1)}}$

A2	Ausführliche Lösungen	
	c) $(0,5x^{0,5})^3 + 3x\sqrt{x} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^3 + 3x\sqrt{x}$ $= \frac{1}{8}x\sqrt{x} + 3x\sqrt{x}$ $= x\sqrt{x} \left(\frac{1}{8} + 3\right)$ $= \left(\frac{1}{8} + \frac{24}{8}\right)x\sqrt{x}$ $= \underline{\underline{\frac{25}{8}x\sqrt{x}}}$	d) $0,5e\sqrt{e^{-2}} + 2e = \frac{1}{2}e \cdot \sqrt{\frac{1}{e^2}} + 2e$ $= \frac{1}{2}e \cdot \frac{1}{e} + 2e$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{e}} + 2e$ $= \underline{\underline{\frac{1}{2} + 2e}}$

A3 Ausführliche Lösungen	
a)	$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \underline{\underline{5\sqrt{2}}}$
b)	$3\sqrt{7} - \sqrt{112} = 3\sqrt{7} - \sqrt{16 \cdot 7}$ $= 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} = \underline{\underline{-\sqrt{7}}}$

A3 Ausführliche Lösungen	
c)	$\sqrt{8x^2} + \frac{x}{2}\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2x^2} + \frac{1}{2}x\sqrt{2}$ $= 2x\sqrt{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{2}$ $= \underline{\underline{2,5x\sqrt{2}}}$
d)	$\sqrt{a^7} - \sqrt{9a^3} = \sqrt{a^6 \cdot a} - \sqrt{3^2 a^2 \cdot a}$ $= a^3\sqrt{a} - 3a\sqrt{a}$ $= \underline{\underline{\sqrt{a}(a^3 - 3a)}}$

A4 Ausführliche Lösungen	
a)	$\sqrt{8k^2 - 16k + 8} = \sqrt{8(k^2 - 2k + 1)}$ $= 2\sqrt{2(k-1)^2}$ $= \underline{\underline{2(k-1)\sqrt{2}}}$
b)	$(1 + \sqrt{k})^2 = 1 + 2\sqrt{k} + k$ <small>1. bin. Formel</small> $= \underline{\underline{k + 2\sqrt{k} + 1}}$

A4 Ausführliche Lösungen	
c)	$(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}(-2)\sqrt{b} + 4b$ <small>2. bin. Formel</small> $= \underline{\underline{a + 4\sqrt{ab} + 4b}}$
d)	$\sqrt{0,25k} - \sqrt{\frac{k}{25}} + 3\sqrt{k} = \sqrt{\frac{1}{4}k} - \frac{1}{5}\sqrt{k} + 3\sqrt{k}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{k} - \frac{1}{5}\sqrt{k} + 3\sqrt{k}$ $= \frac{5}{10}\sqrt{k} - \frac{2}{10}\sqrt{k} + \frac{30}{10}\sqrt{k}$ $= \frac{33}{10}\sqrt{k} = \underline{\underline{3,3\sqrt{k}}}$

A5 Ausführliche Lösung	
a)	$(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2 = \underline{\underline{x - 2}}$ <small>3. binomische Formel</small>

A5 Ausführliche Lösung	
b)	$\sqrt{xy^2} - 5\sqrt{x^2y} + 8x\sqrt{y} - 10y\sqrt{x} = y\sqrt{x} - 5x\sqrt{y} + 8x\sqrt{y} - 10y\sqrt{x}$ $= 3x\sqrt{y} - 9y\sqrt{x} = \underline{\underline{3(x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x})}}$

A6 Ausführliche Lösungen	
a)	$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$
b)	$\frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

A6 Ausführliche Lösungen	
c)	$\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} = \frac{(1+\sqrt{k})(1+\sqrt{k})}{(1-\sqrt{k})(1+\sqrt{k})}$ $= \frac{1+2\sqrt{k}+k}{1^2-(\sqrt{k})^2}$ $= \frac{1+2\sqrt{k}+k}{1-k}$
d)	$\frac{k}{\sqrt{5k}-\sqrt{3k}} = \frac{k(\sqrt{5k}+\sqrt{3k})}{(\sqrt{5k}-\sqrt{3k})(\sqrt{5k}+\sqrt{3k})}$ $= \frac{k(\sqrt{5k}+\sqrt{3k})}{5k-3k}$ $= \frac{k(\sqrt{5k}+\sqrt{3k})}{2k}$ $= \frac{1}{2}(\sqrt{5k}+\sqrt{3k})$

A6 Ausführliche Lösungen	
e)	$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}$ $= \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x})^2-1^2}$ $= \frac{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}{x-1}$
f)	$\sqrt{a+1+a} - \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a+1+a} - \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}$ $= \sqrt{a+1+a} - \frac{a\sqrt{a}}{a}$ $= \sqrt{a+1+a} - \sqrt{a}$ $= \underline{\underline{1+a}}$

A7 Ausführliche Lösung	
a)	$\frac{1}{9k}(\sqrt{k})^5 + \frac{1}{9}(\sqrt{k})^3 + \frac{3}{2}k\sqrt{k} = \frac{1}{9k}\left(k^{\frac{1}{2}}\right)^5 + \frac{1}{9}\left(k^{\frac{1}{2}}\right)^3 + \frac{3}{2}k \cdot k^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{9k}k^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}k^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}k^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{1}{9}k^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{9}k^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}k^{\frac{3}{2}}$ $= \left(\frac{2}{18} + \frac{2}{18} + \frac{27}{18}\right)k^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{31}{18}k^{\frac{3}{2}} = \frac{31}{18}k\sqrt{k}$

A7	Ausführliche Lösung
b)	$-\frac{1}{2k} \left[(-\sqrt{k})^4 + k(-\sqrt{k})^2 \right] = -\frac{1}{2k} \left[(\sqrt{k})^4 + k(\sqrt{k})^2 \right]$ $= -\frac{1}{2k} (k^2 + k \cdot k) = -\frac{1}{2k} \cdot 2k^2 = \underline{\underline{-k}}$

A7	Ausführliche Lösung
c)	$-\frac{k^2}{144} \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{k}}\right)^3 + \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{k}}\right) = -\frac{k^2}{4 \cdot 6^2} \cdot \frac{6^3}{(\sqrt{k})^3} + \frac{k}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{k}}$ $= -\frac{k^2}{4} \cdot \frac{6}{k^{\frac{3}{2}}} + \frac{3k}{k^{\frac{1}{2}}}$ $= -\frac{3k^2 \cdot k^{\frac{3}{2}}}{2} + 3k \cdot k^{-\frac{1}{2}}$ $= -\frac{3}{2} k^{\frac{1}{2}} + 3k^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{3}{2} k^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{3}{2} \sqrt{k}}}$

A7	Ausführliche Lösung
d)	$\frac{1}{k^2} (\sqrt{0,5k})^3 - \frac{3}{2k} (\sqrt{0,5k})^2 + 2 = \frac{1}{k^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right)^3 - \frac{3}{2k} \cdot \frac{k}{2} + 2$ $= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k\sqrt{k}}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2$ $= \frac{\sqrt{k}}{2k \cdot \sqrt{2}} - \frac{3}{4} + \frac{8}{4}$ $= \frac{\sqrt{k} \cdot \sqrt{2}}{2k \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \frac{5}{4} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2k}}{4k} + \frac{5}{4}}}$

A8	Ausführliche Lösung
a)	$\sqrt{8} - 3\sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \underline{\underline{-\sqrt{2}}}$

A8	Ausführliche Lösung
b)	$\sqrt{18} - 3\sqrt{8} = \sqrt{9 \cdot 2} - 3\sqrt{4 \cdot 2} = 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = \underline{\underline{-3\sqrt{2}}}$

A8	Ausführliche Lösung
c)	$\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{25} = \sqrt{5} + \sqrt{4 \cdot 5} - 5 = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5 = \underline{\underline{3\sqrt{5} - 5}}$