

Lösungen Potenzen und Wurzeln I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse			
	a)	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	b)	$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$
	c)	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	d)	$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
	e)	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	f)	$\frac{ax^9 + bx^7}{x^5} = ax^4 + bx^2$
g)	$\frac{(4a^2 + 4a + 1)^x}{(2a+1)^x} = (2a+1)^x$	h)	$\frac{49z^2 - 1}{7z - 1} = 7z + 1$	

E2	Ergebnisse	
	a)	$\frac{ma^5 - ma^3b^2}{ma^2} = a^3 - ab^2$
	b)	$\frac{25x^2 - 100y^2}{5x + 10y} = 5x - 10y$
c)	$\frac{(a^2 + 2ab + b^2)^3}{(a+b)^3} = (a+b)^3$	

E3	Ergebnisse		
	a)	$\frac{(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)^m}{(a-b)^m} = (a-b)^{2m}$	b)

E4	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{x^2y^2} = xy$	b)	$\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$
	c)	$\sqrt{4x^2y^2} = 2xy$	d)	$\sqrt[3]{u^3v^3w^3} = uvw$
	e)	$\sqrt[5]{x^{10}y^5z^{15}} = x^2yz^3$	f)	$\sqrt[4]{a^2b^4c^6} = \sqrt{a} \cdot bc \cdot \sqrt{c}$
g)	$(x^4y^4)^{\frac{3}{2}} = (xy)^6$	h)	$(27a^3b^6)^{\frac{1}{3}} = 3ab^2$	

E5	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$	b)	$\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{b} + 2\sqrt[3]{y} - 3\sqrt[3]{b} = 3\sqrt[3]{y} - 4\sqrt[3]{b}$
	c)	$\left[(a+b)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \cdot \left[(a+b)^{-\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$	d)	$\frac{3\sqrt{a^3} \cdot 2\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[4]{a} \cdot a^{\frac{3}{4}}} = 6a^3$
e)	$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[12]{x^{-18}} = 1$	f)	$(n+x)^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{(n+x)^5} = (n+x)^2$	

E6		Ergebnisse	
a)	$\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot 2x^{\frac{2}{3}} \cdot 5\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^4}}{x^4 \cdot \sqrt[4]{x^3}} = 10x^3$	b)	$\frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^7}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^3}} = a^2$

E7		Ergebnisse	
a)	$\frac{1}{x^3} - 2x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} = 6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}}$		
b)	$(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a-b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}} = 2(a+b)^{\frac{2}{3}}$		
c)	$\sqrt{a+b} + \sqrt[3]{a+b} - \sqrt{a-b} + \sqrt[3]{a-b} - 3\sqrt[3]{a+b} + 2\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} = 3\sqrt{a+b} - 2 \cdot \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$		

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$(\sqrt{a})^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen :

A1	Ausführliche Lösung	
	a)	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1. binomische Formel

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$ 1. binomische Formel

A1	Ausführliche Lösung	
	c)	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 2. binomische Formel

A1	Ausführliche Lösung	
	d)	$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ 2. binomische Formel

A1	Ausführliche Lösung	
	e)	$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$ $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = \underline{\underline{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	f)	$\frac{ax^9 + bx^7}{x^5} = \frac{x^5(ax^4 + bx^2)}{x^5} = \underline{\underline{ax^4 + bx^2}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	g)	$\frac{(4a^2 + 4a + 1)^x}{(2a+1)^x} = \left[\frac{(4a^2 + 4a + 1)}{2a+1} \right]^x$ $= \left[\frac{(2a+1)^2}{2a+1} \right]^x = \underline{\underline{(2a+1)^x}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	h)	$\frac{49z^2 - 1}{7z - 1} = \frac{(7z+1)(7z-1)}{7z-1} = \underline{\underline{7z+1}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	$\frac{ma^5 - ma^3b^2}{ma^2} = \frac{ma^2(a^3 - ab^2)}{ma^2} = \underline{\underline{a^3 - ab^2}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	$\frac{25x^2 - 100y^2}{5x + 10y} = \frac{(5x - 10y)(5x + 10y)}{5x + 10y} = \underline{\underline{5x - 10y}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	c)	$\frac{(a^2 + 2ab + b^2)^3}{(a+b)^3} = \left[\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a+b} \right]^3 = \left[\frac{(a+b)^2}{a+b} \right]^3 = \underline{\underline{(a+b)^3}}$

A3	Ausführliche Lösung	
	a)	$\frac{(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)^m}{(a-b)^m} = \left[\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a-b} \right]^m$ <p>Teillösung durch Polynomdivision</p> $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a-b) = a^2 - 2ab + b^2$ $\begin{array}{r} -(a^3 - a^2b) \\ \hline -2a^2b + 3ab^2 \\ -(-2a^2b + 2ab^2) \\ \hline ab^2 - b^3 \\ -(ab^2 - b^3) \\ \hline 0 \end{array}$ $\Rightarrow \left[\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{a-b} \right]^m = \left(\underbrace{a^2 - 2ab + b^2}_{\text{2. bin. Formel}} \right)^m$ $= \left[(a-b)^2 \right]^m = \underline{\underline{(a-b)^{2m}}}$

A3	Ausführliche Lösung	
	b)	$\frac{x^4y^5 - x^3y^4 + x^2y^3}{x^2y^2} = \frac{x^2y^2(x^2y^3 - xy^2 + y)}{x^2y^2} = \underline{\underline{x^2y^3 - xy^2 + y}}$

A4	Ausführliche Lösungen	
	a)	$\sqrt{x^2y^2} = (x^2y^2)^{\frac{1}{2}} = x^{2 \cdot \frac{1}{2}} y^{2 \cdot \frac{1}{2}} = \underline{\underline{xy}}$
	b)	$\sqrt{a^2b^2c^2} = (a^2b^2c^2)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{abc}}$

A4	Ausführliche Lösungen	
	c)	$\sqrt{4x^2y^2} = (2^2x^2y^2)^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2xy}}$
	d)	$\sqrt[3]{u^3v^3w^3} = (u^3v^3w^3)^{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{uvw}}$

A4	Ausführliche Lösungen	
	e)	$\sqrt[5]{x^{10}y^5z^{15}} = (x^{10}y^5z^{15})^{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{x^2yz^3}}$
	f)	$\sqrt[4]{a^2b^4c^6} = (a^2b^4c^6)^{\frac{1}{4}}$ $= \underline{\underline{a^{\frac{1}{2}}bc^{\frac{3}{2}}}} = \underline{\underline{\sqrt{a} \cdot bc \cdot \sqrt{c}}}$

A6 Ausführliche Lösungen	
a)	b)
$\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot 2x^{\frac{2}{3}} \cdot 5\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^4}}{x^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$ $= \frac{2 \cdot 5x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}}$ $= \frac{10x^{\frac{9}{6}} \cdot x^{\frac{4}{6}} \cdot x^{\frac{3}{6}} \cdot x^{\frac{8}{6}}}{x^{\frac{1+3}{4}}}$ $= \frac{10x^{\frac{9+4+3+8}{6}}}{x^{\frac{4}{4}}} = \frac{10x^{\frac{24}{6}}}{x^1}$ $= \frac{10x^4}{x} = \underline{\underline{10x^3}}$	$\frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^7}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[4]{a^3}}$ $= \frac{a^{\frac{4}{5}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}}}$ $= \frac{a^{\frac{4+2+3+3+7}{5+3+5+3}}}{a^{\frac{3+3+3}{4+2+4}}}$ $= \frac{a^{\frac{19}{5}}}{a^{\frac{9}{4}}}$ $= \frac{a^{\frac{12}{15} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{35}{15}}}{a^{\frac{3+3+3}{4+4+4}}}$ $= \frac{a^{\frac{75}{15}}}{a^{\frac{12}{4}}} = \frac{a^5}{a^3} = \underline{\underline{a^2}}$

A7 Ausführliche Lösung	
a)	$x^3 - 2x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}}$ $= x^3 + 5x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}}}}$

A7 Ausführliche Lösung	
b)	$(a+b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a-b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} - (a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}}$ $= (a+b)^{\frac{1}{2}} - (a-b)^{\frac{1}{2}} - (a+b)^{\frac{1}{2}} + (a-b)^{\frac{1}{2}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} + (a+b)^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{2(a+b)^{\frac{2}{3}}}}$

A7 Ausführliche Lösung	
c)	$\sqrt{a+b} + \sqrt[3]{a+b} - \sqrt{a-b} + \sqrt[3]{a-b} - 3\sqrt[3]{a+b} + 2\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$ $= \sqrt{a+b} + 2\sqrt{a+b} + \sqrt[3]{a+b} - 3\sqrt[3]{a+b} - \sqrt{a-b} + \sqrt{a-b} + \sqrt[3]{a-b}$ $= \underline{\underline{3\sqrt{a+b} - 2 \cdot \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}}}$