Lösungen Logarithmus IV

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse			
	a)	$\log_3(x) = 3 \Leftrightarrow x = 27$	b)	$\log_x(3) = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
	c)	$\log_2(5) = x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(5)}{\ln(2)} \approx 2{,}322$	d)	$\log_4(x-1) = -1{,}5 \Leftrightarrow x = \frac{9}{8}$
	e)	$\log_x(3) = 0 \Leftrightarrow x = \{\ \}$	f)	$\lg(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}\sqrt{10}$
	g)	$\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$	h)	$\lg(2x) = 0{,}5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{10} \approx 1{,}581$
	i)	$\log_x(4) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 64$	j)	$\log_4(x) + \log_4(2) = \log_4(12) \Leftrightarrow x = 6$
	k)	$\log_3(x) - \log_3(5) = 3 \Leftrightarrow x = 135$	l)	$\log_5(12) = x \Leftrightarrow x = \frac{\ln(12)}{\ln(5)} \approx 1{,}544$

E2	Ergebnisse			
	a)	$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$	b)	$\log\left(\frac{1}{ab}\right) = -\log(a) - \log(b)$
	c)	$\log(3x-3) - \log(x-1) = \log(3)$	d)	$\log\left(\sqrt{2xy}\right) = \frac{1}{2}\left[\log(2) + \log(x) + \log(y)\right]$
	e)	$\ln(u) + 2\ln(v) = \ln\left(uv^2\right)$	f)	$-\lg\left(\frac{1}{u}\right) = \lg(u)$
	g)	$\lg(x) - \lg(y) + \frac{1}{2}\lg(z) = \lg\left(\frac{x\sqrt{z}}{y}\right)$	h)	$\ln\left(e^2\right) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right) = 3\ln(2) - 1$
	i)	$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$	j)	$\log\left(x^3\right) - \log(x) = 2\log(x)$
	k)	$\lg(uv) + \lg\left(\frac{1}{v^2}\right) = \lg(u) - \lg(v)$	l)	$\log\left(\sqrt{x}\right) + 1{,}5\log(x) = 2\log(x)$

E3	Ergebnisse	
	a)	$\ln\left(2e^2\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right)=3$
	b)	$\ln\left(\frac{4}{3}u\right)-\ln\left(\frac{4}{u}\right)=2\ln(u)-\ln(3)\,;\,u>0$
	c)	$\ln\left(1-x^2\right)-\ln(1+x)=\ln(1-x)$
	d)	$\ln(x)-\ln(4)+\ln\left(\frac{4y}{x}\right)=\ln(y)$
	e)	$\ln\left(\frac{1}{a^2}\right)-\ln(2a)-\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-2\ln(a)-\ln(2)$
	f)	$\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)-\ln(x+1)=-\ln(2+x)$

E4	Ergebnisse					
	a)	$\log_3(4)=\frac{\ln(4)}{\ln(3)}$ (W)	b)	$\log_3(4)=\frac{\lg(3)}{\lg(4)}$ (F)	c)	$\log_3(4)=\frac{\lg(4)}{\lg(3)}$ (W)

E5	Ergebnis	
	$\ln\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\ln(x)=\frac{1}{8}$	$\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)=-\frac{1}{4}$
	$\ln\left(x^2\right)=2\ln(x)=\frac{1}{2}$	$\ln^2(x)=(\ln x)^2=\frac{1}{16}$

E6	Ergebnis	
	$\lg(4000)=\lg(4\cdot 1000)=\lg(4)+3$	1. Logarithmengesetz
	$\lg(0{,}25)=\lg(1)-\lg(4)=-\lg(4)$	2. Logarithmengesetz

E7	Ergebnis						
	$e^{2\ln(u)}$	$e^{\ln\left(\frac{u}{2}\right)}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{\ln(u)}{2}}$	$e^{-\frac{\ln(u)}{3}}$	$2e^{\ln\left(u^2\right)}$	$e^{\ln(u)-1}$	$e^{\ln(t-1)}$
	u^2	$\frac{u}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{u}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{u}}$	$2u^2$	$u\cdot e^{-1}$	$u-1$

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösungen			
	a)	Definition: $\log_a(b)=c \Leftrightarrow a^c=b$ $\log_3(x)=3$ $\Leftrightarrow 3^3=x$ $\Leftrightarrow x=27$	b)	$\log_x(3)=-2 \Leftrightarrow x^{-2}=3$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}=3\,\vert\cdot x^2 \Leftrightarrow 1=3x^2\,\vert:3$ $\Leftrightarrow \frac{1}{3}=x^2\,\vert\sqrt{\ } \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{3}}=\lvert x\rvert$ $\lvert x\rvert=\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ $x=\sqrt{\frac{1}{3}}$ da $x>0$ (Definition)

A1	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\log_2(5)=x \Leftrightarrow 2^x=5\,\vert\ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(2^x)=\ln(5)$ $\Leftrightarrow x\cdot\ln(2)=\ln(5)\,\vert:\ln(2)$ $\Leftrightarrow x=\frac{\ln(5)}{\ln(2)}\approx 2{,}322$	d)	$\log_4(x-1)=-1{,}5 \Leftrightarrow 4^{-\frac{3}{2}}=x-1$ $\Leftrightarrow x-1=\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}\,\vert+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{(2^2)^{\frac{3}{2}}}+1$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{(2^3)}+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}+\frac{8}{8} \Leftrightarrow x=\frac{9}{8}$

A1	Ausführliche Lösungen			
	e)	$\log_x(3)=0 \Leftrightarrow x^0=3$ (Widerspruch) denn $x^0=1$ $\Rightarrow x=\{\ \}$	f)	$\lg(x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 10^{-\frac{1}{2}}=x$ $\Leftrightarrow x=\frac{1\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{10}\sqrt{10}$

A1	Ausführliche Lösungen			
	g)	$\ln(x)=-1 \Leftrightarrow e^{-1}=x$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}\approx 0{,}368$	h)	$\lg(2x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 10^{\frac{1}{2}}=2x\,\vert:2$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\cdot 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\approx 1{,}581$

A1	Ausführliche Lösungen			
	i)	$\log_x(4)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}}=4\,\vert^3$ $\Leftrightarrow x=4^3 \Leftrightarrow x=64$	j)	$\log_4(x)+\log_4(2)=\log_4(12)$ $\Leftrightarrow \log_4(2x)=\log_4(12)$ $\Leftrightarrow 2x=12\,\vert:2 \Leftrightarrow x=6$

A1	Ausführliche Lösungen		
k)	$\log_3(x)-\log_3(5)=3$ $\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{5}\right)=3 \Leftrightarrow 3^3=\frac{x}{5}\mid\cdot 5$ $\Leftrightarrow 5\cdot 3^3=x \Leftrightarrow x=135$	l)	$\log_5(12)=x \Leftrightarrow 5^x=12\mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(5^x)=\ln(12)$ $\Leftrightarrow x\cdot\ln(5)=\ln(12)\mid:\ln(5)$ $\Leftrightarrow x=\frac{\ln(12)}{\ln(5)}\approx 1{,}544$

A2	Ausführliche Lösungen		
a)	$\log(xy)=\log(x)+\log(y)$	b)	$\log\left(\frac{1}{ab}\right)=\log(1)-\log(ab)$ $=-\left[\log(a)+\log(b)\right]$

A2	Ausführliche Lösungen		
c)	$\log(3x-3)-\log(x-1)$ $=\log\left(\frac{3x-3}{x-1}\right)=\log\left[\frac{3(x-1)}{x-1}\right]$ $=\log(3)$	d)	$\log\left(\sqrt{2xy}\right)=\log\left[(2xy)^{\frac{1}{2}}\right]$ $=\frac{1}{2}\left[\log(2)+\log(x)+\log(y)\right]$

A2	Ausführliche Lösungen		
e)	$\ln(u)+2\ln(v)=\ln(u)+\ln(v^2)$ $=\ln(uv^2)$	f)	$-\lg\left(\frac{1}{u}\right)=-\left[\lg(1)-\lg(u)\right]$ $=-\left[0-\lg(u)\right]=\lg(u)$

A2	Ausführliche Lösungen		
g)	$\lg(x)-\lg(y)+\frac{1}{2}\lg(z)$ $=\lg\left(\frac{x}{y}\right)+\lg\left(z^{\frac{1}{2}}\right)=\lg\left(\frac{x\sqrt{z}}{y}\right)$	h)	$\ln(e^2)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=2\ln(e)-3\left[\ln(e)-\ln(2)\right]$ $=2\cdot 1-3\left[1-\ln(2)\right]=2-3+3\ln(2)$ $=3\ln(2)-1$

A2	Ausführliche Lösungen		
i)	$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ $=\ln(1-x)-\ln(1+x)$	j)	$\log(x^3)-\log(x)=\log\left(\frac{x^3}{x}\right)$ $=\log(x^2)=2\log(x)$

A2	Ausführliche Lösungen		
k)	$\lg(uv)+\lg\left(\frac{1}{v^2}\right)=\lg\left(uv\cdot\frac{1}{v^2}\right)$ $=\lg\left(\frac{u}{v}\right)=\lg(u)-\lg(v)$	l)	$\log\left(\sqrt{x}\right)+1{,}5\log(x)=\log\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{3}{2}\log(x)$ $=\frac{1}{2}\log(x)+\frac{3}{2}\log(x)=2\log(x)$

A3	Ausführliche Lösungen		
a)	$\ln\left(2e^2\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right)$ $=\ln(2)+\ln\left(e^2\right)+\ln(e)-\ln(2)$ $=2\ln(e)+\ln(e)$ $=2+1=3$	b)	$\ln\left(\frac{4}{3}u\right)-\ln\left(\frac{4}{u}\right);u>0$ $=\ln\left(\frac{\frac{4u}{3}}{\frac{4}{u}}\right)=\ln\left(\frac{4u\cdot u}{3\cdot 4}\right)=\ln\left(\frac{u^2}{3}\right)$ $=\ln\left(u^2\right)-\ln(3)=2\ln(u)-\ln(3)$

A3	Ausführliche Lösungen		
c)	$\ln\left(1-x^2\right)-\ln(1+x)$ $=\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x}\right)=\ln\left[\frac{(1-x)(1+x)}{1+x}\right]$ $=\ln(1-x)$	d)	$\ln(x)-\ln(4)+\ln\left(\frac{4y}{x}\right)$ $=\ln\left(\frac{x}{4}\right)+\ln\left(\frac{4y}{x}\right)=\ln\left(\frac{x}{4}\cdot\frac{4y}{x}\right)=\ln(y)$

A3	Ausführliche Lösungen		
e)	$\ln\left(\frac{1}{a^2}\right)-\ln(2a)-\ln\left(\frac{1}{a}\right)$ $=\ln\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2a}\cdot a\right)=\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right)$ $=\ln(1)-\ln\left(2a^2\right)=-\left[\ln(2)+2\ln(a)\right]$ $=-2\ln(a)-\ln(2)$	f)	$\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)-\ln(x+1)$ $=\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\cdot\frac{1}{x+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{2+x}\right)$ $=\ln(1)-\ln(2+x)$ $=\ln(2+x)$

A4	Ausführliche Lösungen
a)	$\log_3(4)=\frac{\ln(4)}{\ln(3)}$ ist wahr, denn $\log_a(b)=\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$
b)	$\log_3(4)=\frac{\lg(3)}{\lg(4)}$ ist falsch, denn $\log_a(b)=\frac{\lg(b)}{\lg(a)}$
c)	$\log_3(4)=\frac{\lg(4)}{\lg(3)}$ ist wahr, denn $\log_a(b)=\frac{\lg(b)}{\lg(a)}$

A5	Ausführliche Lösungen
	$\ln(x)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4}}=x$
	$x=e^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \ln\left(\sqrt{x}\right)=\ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right)=\ln\left[\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\ln\left(e^{\frac{1}{8}}\right)=\frac{1}{8}\ln(e)=\frac{1}{8}$
	$x=e^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\right)=\ln\left(e^{-\frac{1}{4}}\right)=-\frac{1}{4}\ln(e)=-\frac{1}{4}$
	$x=e^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \ln\left(x^2\right)=\ln\left[\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^2\right]=\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln(e)=\frac{1}{2}$
	$x=e^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \ln^2(x)=\ln(x)\cdot\ln(x)=\ln\left(e^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\ln\left(e^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{4}\ln(e)\cdot\frac{1}{4}\ln(e)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

A6	Ausführliche Lösung
	$\lg(4)\approx 0{,}602 \Rightarrow \lg(4000)=\lg(4\cdot 1000)=\lg\left(4\cdot 10^3\right)=\lg(4)+3\lg(10)=\lg(4)+3$
	$\lg(0{,}25)=\lg\left(\frac{1}{4}\right)=\lg(1)-\lg(4)=-\lg(4)$

A7	Ausführliche Lösungen
	$e^{2\ln(u)}=e^{\ln\left(u^2\right)}=u^2$ wegen $e^{\ln(b)}=b$
	$e^{\ln\left(\frac{u}{2}\right)}=\frac{u}{2}$ wegen $e^{\ln(b)}=b$
	$\frac{1}{2}e^{\frac{\ln(u)}{2}}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\ln(u)}=\frac{1}{2}e^{\ln\left(u^{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{u}$
	$e^{-\frac{\ln(u)}{3}}=e^{-\frac{1}{3}\ln(u)}=e^{-\ln\left(u^{\frac{1}{3}}\right)}=\frac{1}{e^{\ln\left(u^{\frac{1}{3}}\right)}}=\frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{u}}$
	$2e^{\ln\left(u^2\right)}=2u^2$
	$e^{\ln(u)-1}=e^{\ln(u)}\cdot e^{-1}=u\cdot e^{-1}$
	$e^{\ln(u-1)}=u-1$