

## Lösungen Logarithmus III

### Ergebnisse:

E1	Ergebnisse			
	a) $\log_2(0,125) = -3$	b) $\log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$	c) $\log_{32}(2) = 0,2$	d) $\log_{\sqrt{5}}(125) = 6$

E2	Ergebnisse			
	a) $\log_a(5) = 1 \Leftrightarrow a = 5$	b) $\log_4(y) = -2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{16}$		
	c) $\log_3(1) = x \Leftrightarrow x = 0$	d) $\log_3(\sqrt{b}) = 1,5 \Leftrightarrow b = 27$		

E3	Ergebnisse			
	$\log_a(3) = 0,25 \Leftrightarrow a^{0,25} = 3$ ; mit $81 = 3^4$ folgt $(a^{0,25})^4 = 3^4 \Rightarrow a = 81 \Rightarrow \log_{81}(81) = 1$			

E4	Ergebnisse					
	a) $\ln(8) \approx 2,07944$	b) $\ln(2+e) \approx 1,55144$	c) $3\ln(e^{-2}) = -6$			
	d) $[\ln(1-e^{-1})]^2 \approx 0,21038$	e) $\ln(2) - \ln(\sqrt{e}) \approx 0,193$	f) $\ln(2) \cdot [\ln(e^3) - 2] \approx 0,693$			

E5	Ergebnisse		
	a) $\frac{\ln(2)}{3} - 1 \approx -0,768950$	b) $\frac{\ln(\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2})} \approx 1,58496$	c) $\ln\left(\frac{2}{e}\right) - 1 \approx -1,30685$

E6	Ergebnisse		
	a) $\ln(-x)$ für $x < 0$	b) $\ln(x-2)$ für $x > 2$	c) $\ln(\ln x)$ für $x > 1$

E7	Entscheiden Sie, ob der Term einen positiven, einen negativen Wert oder den Wert Null annimmt.					
	a) $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$	b) $\ln(1,085) > 0$	c) $\ln\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right) < 0$			
	d) $\ln[\ln(e)] = 0$	e) $\ln\left(\frac{2^6}{32}\right) > 0$	f) $\ln(x^2 + 2) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$			

E8	Ergebnisse		
	a) $(u - e^{\ln(2u)})^2 = u^2$	b) $\ln(\sqrt{e^{2u}}) = u$	c) $e^{\ln(2u)} - 2ue^{\ln(2)} = -2u$

E9 Ergebnisse					
a)	$\log_3(9) + \log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -3$	b)	$\log_9(3^4) = 2$	c)	$\log_5(\sqrt{125}) = \frac{3}{2}$
d)	$\log_a\left(\frac{1}{a^2}\right) = -2$	e)	$\log_8(2) = \frac{1}{3}$	f)	$\log_a(\sqrt{a^k}) = \frac{k}{2}$
g)	$\ln(e^{-3}) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -3,5$	h)	$\log_5(0,04) = -2$	i)	$\log_2(\sqrt{8}) = \frac{3}{2}$

### Logarithmengesetze

#### Logarithmus zur Basis a

$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$	$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$
$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$	$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$
$\log_a(a) = 1 \quad \log_a(1) = 0$	$b = a^{\log_a(b)} \quad b^x = a^{x \cdot \log_a(b)}$

#### Logarithmus zur Basis 10 (Zehner- oder dekadischer Logarithmus) [LOG]-Taste

$x = \lg(b) \Leftrightarrow 10^x = b$	$\lg(b \cdot c) = \lg(b) + \lg(c)$
$\lg\left(\frac{b}{c}\right) = \lg(b) - \lg(c)$	$\lg(b^c) = c \cdot \lg(b)$
$\lg(10) = 1 \quad \lg(1) = 0$	$b = 10^{\lg(b)} \quad b^x = 10^{x \cdot \lg(b)}$

#### Logarithmus zur Basis e (Natürlicher Logarithmus oder Logarithmus Naturalis)

$x = \ln(b) \Leftrightarrow e^x = b$	$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$
$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$
$\ln(e) = 1 \quad \ln(1) = 0$	$b = e^{\ln(b)} \quad b^x = e^{x \cdot \ln(b)}$

#### Umrechnung von einem Logarithmensystem in ein anderes.

$\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$	$\log_3(5) = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1,4649735$
---	---

**Ausführliche Lösungen:**

A1	Ausführliche Lösungen	
	a) $\log_2(0,125) = x \Leftrightarrow 2^x = 0,125$ $2^x = 0,125 = \frac{1}{8} = 8^{-1} = (2^3)^{-1} = 2^{-3}$ $\Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow \log_2(0,125) = -3$	b) $\log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right) = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow \log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right) = 3$

A1	Ausführliche Lösungen	
	c) $\log_{32}(2) = x \Leftrightarrow 32^x = 2$ $32^x = 2 \Leftrightarrow (2^5)^x = 2$ $\Leftrightarrow (2^x)^5 = 2 \mid \sqrt[5]{\phantom{x}} \Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{1}{5}}$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow \log_{32}(2) = \frac{1}{5}$	d) $\log_{\sqrt{5}}(125) = x \Leftrightarrow (\sqrt{5})^x = 125$ $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^x = 125 = 5^3 \Leftrightarrow (5^x)^{\frac{1}{2}} = 5^3 \mid ^2$ $\Leftrightarrow 5^x = 5^6 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}}(125) = 6$

A2	Ausführliche Lösungen	
	a) $\log_a(5) = 1 \Leftrightarrow a^1 = 5$ $\Leftrightarrow a = 5$	b) $\log_4(y) = -2 \Leftrightarrow 4^{-2} = y$ $\Leftrightarrow y = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

A2	Ausführliche Lösungen	
	c) $\log_3(1) = x \Leftrightarrow 3^x = 1$ $\Leftrightarrow x = 0$	d) $\log_3(\sqrt{b}) = 1,5 \Leftrightarrow 3^{1,5} = \sqrt{b}$ $3^{1,5} = \sqrt{b} \mid ^2 \Leftrightarrow (3^{1,5})^2 = b$ $\Leftrightarrow 3^3 = b \Leftrightarrow b = 27$

A3	Ausführliche Lösung	
	$\log_a(81) = x$ es gilt: $\log_a(3) = 0,25 \Leftrightarrow a^{0,25} = 3$ $a^{0,25} = 3 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = 3 \mid ^4 \Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 3^4 \Leftrightarrow a = 81$ $\log_{81}(81) = x \Leftrightarrow 81^x = 81 \Leftrightarrow x = 1$ $\Leftrightarrow \log_{81}(81) = 1$	

A4	Ausführliche Lösungen		
a)	$\ln(8) \approx 2,079$ <input type="text" value="8"/> <input type="text" value="ln"/>	b)	$\ln(2+e) \approx 1,551$ <input type="text" value("(")"=""/> <input type="text" value="2"/> <input type="text" value="+"/> <input type="text" value="1"/> <input type="text" value="2nd"/> <input type="text" value="e^x"/> <input type="text" value=")"/>

A4	Ausführliche Lösungen		
c)	$3\ln(e^{-2}) = -2 \cdot 3\ln(e)$ $= -6 \cdot 1$ $= -6$	d)	$[\ln(1-e^{-1})]^2 \approx 0,210$ <input type="text" value("(")"=""/> <input type="text" value="1"/> <input type="text" value="-"/> <input type="text" value="1"/> <input type="text" value="±"/> <input type="text" value="2nd"/> <input type="text" value="e^x"/> <input type="text" value=")"/> <input type="text" value="ln"/> <input type="text" value="x^2"/>

A4	Ausführliche Lösungen		
e)	$\ln(2) - \ln(\sqrt{e}) = \ln(2) - \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$ $= \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(e)$ $= \ln(2) - \frac{1}{2} \cdot 1$ $\approx 0,193$	f)	$\ln(2) \cdot (\ln(e^3) - 2) = \ln(2) \cdot (3 \cdot \ln(e) - 2)$ $= \ln(2) \cdot (3 \cdot 1 - 2)$ $= \ln(2) \cdot (1)$ $= \ln(2)$ $\approx 0,693$

A5	Ausführliche Lösung	
a)	$\frac{\ln(2)}{3} - 1 \approx -0,769$	<input type="text" value="2"/> <input type="text" value="ln"/> <input type="text" value=":"/> <input type="text" value="3"/> <input type="text" value="-"/> <input type="text" value="1"/> <input type="text" value="="/>

A5	Ausführliche Lösung	
b)	$\frac{\ln(\sqrt{3})}{\ln(\sqrt{2})} = \frac{\ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right)}{\ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\ln(3)}{\frac{1}{2}\ln(2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 1,585$	

A5	Ausführliche Lösung	
c)	$\ln\left(\frac{2}{e}\right) - 1 = \ln(2) - \ln(e) - 1 = \ln(2) - 1 - 1 = \ln(2) - 2 \approx 1,307$	

A6	Ausführliche Lösung	
a)	$\ln(-x)$ Der Logarithmus ist nur für positive Argumente definiert. $-x > 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow \ln(-x)$ ist definiert für $x < 0$	

A6	Ausführliche Lösung	
b)	$\ln(x-2)$ Der Logarithmus ist nur für positive Argumente definiert. $x-2 > 0 \mid +2 \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow \ln(x-2)$ ist definiert für $x > 2$	

A6	Ausführliche Lösung
	c) $\ln(\ln(x))$ Der Logarithmus ist nur für positive Argumente definiert. $\ln(x) > 0$ falls $x > 1 \Rightarrow \ln(\ln(x))$ ist definiert für $x > 1$
A7	Ausführliche Lösung
	a) $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$ da $\frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0,405$
A7	Ausführliche Lösung
	b) $\ln(1,0085) > 0$ da $1,0085 > 1 \Rightarrow \ln(1,0085) \approx 0,082$
A7	Ausführliche Lösung
	c) $\ln\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right) < 0$ da $\frac{4}{\sqrt{18}} \approx 0,942 < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right) \approx -0,059$
A7	Ausführliche Lösung
	d) $\ln(\ln(e)) = 0$ da $\ln(e) = 1$ und $\ln(1) = 0$
A7	Ausführliche Lösung
	e) $\ln\left(\frac{2^6}{32}\right) > 0$ da $\frac{2^6}{32} = \frac{2^6}{2^5} = 2 > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{2^6}{32}\right) = \ln(2) \approx 0,693$
A7	Ausführliche Lösung
	f) $\ln(x^2 + 2) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ da $x^2 + 2 > 1$ ist
A8	Ausführliche Lösung
	a) $(u - e^{\ln(2u)})^2 = (u - 2u)^2 = (-u)^2 = u^2$
A8	Ausführliche Lösung
	b) $\ln(\sqrt{e^{2u}}) = \ln\left(e^{\frac{2u}{2}}\right) = u \cdot \ln(e) = u$
A8	Ausführliche Lösung
	c) $e^{\ln(2u)} - 2u \cdot e^{\ln(2)} = 2u - 2u \cdot 2 = 2u - 4u = -2u$

A9	Ausführliche Lösungen	
	a)	b)
	$\log_3(9) + \log_3\left(\frac{1}{243}\right)$ $= \log_3(3^2) + \log_3(1) - \log_3(143)$ $= 2 \cdot \log_3(3) + 0 - \log_3(3^5)$ $= 2 - 5 \cdot \log_3(3) = 2 - 5 = -3$	$\log_9(3^4)$ $= \log_9(3^2 \cdot 3^2)$ $= \log_9(9^2)$ $= 2 \cdot \log_9(9)$ $= 2 \cdot 1 = 2$

A9	Ausführliche Lösungen	
	c)	d)
	$\log_5(\sqrt{125}) = \log_5\left(5^{\frac{3}{2}}\right)$ $= \frac{3}{2} \cdot \log_5(5) = \frac{3}{2}$	$\log_a\left(\frac{1}{a^2}\right) = \log_a(a^{-2})$ $= -2 \cdot \log_a(a)$ $= -2$

A9	Ausführliche Lösungen	
	e)	f)
	$\log_8(2) = \log_8\left(8^{\frac{1}{3}}\right)$ $= \frac{1}{3} \cdot \log_8(8) = \frac{1}{3}$	$\log_a(\sqrt{a^k}) = \log_a\left(a^{\frac{k}{2}}\right)$ $= \frac{k}{2} \cdot \log_a(a) = \frac{k}{2}$

A9	Ausführliche Lösungen	
	g)	h)
	$\ln(e^{-3}) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ $= -3 \cdot \ln(e) + \ln(1) - \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$ $= -3 \cdot 1 + 0 - \frac{1}{2} \cdot \ln(e)$ $= -3 - \frac{1}{2} = -3,5$	$\log_5(0,04) = \log_5\left(\frac{4}{100}\right)$ $= \log_5\left(\frac{4}{4 \cdot 25}\right)$ $= \log_5\left(\frac{1}{5^2}\right)$ $= \log_5(1) - \log_5(5^2)$ $= 0 - 2 \cdot \log_5(5) = -2$

A9		
	i)	
	$\log_2(\sqrt{8}) = \log_2(\sqrt{2^3}) = \log_2\left(2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2} \cdot \log_2(2) = \frac{3}{2}$	