Lösungen Exponentialgleichungen V

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$ Substitution: $u = e^{x}$ ergibt $u^2 - 3u - 4 = 0$ für $u_1 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(4)}}$; für $u_2 = -1 \Rightarrow$ keine Lösung
	b)	$4 - 3e^{-0,5x} = e^{0,5x}$ $4e^{0,5x} - 3 - e^{x} = 0$ Substitution: $u = e^{0,5x}$ ergibt $4u - 3 - u^2 = 0$ Lösungen in u: $u_1 = 3$; $u_2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2\ln 3}}$; $\underline{\underline{x_2 = 0}}$

E2	Ergebnisse	
	a)	$e^{2x} - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{3}\ln(2)}}$
	b)	$4e^{x} - \frac{e^{-x}}{3} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\frac{1}{2}\ln(12)}}$
	c)	$\left(e^{-x} - 1\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln(4)}}$
	d)	$-\frac{2}{5}e^{0,5x} + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{2}{3}\cdot\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0,611}}$

E3	Ergebnisse	
	a)	$2^{x-2} = 23 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\ln(23)}{\ln(2)} + 2 \approx 6,52}}$
	b)	$5^{x+3} - 5^{3x-5} = 0 \Leftrightarrow 5^{x+3}\left(1 - 5^{2x-8}\right) = 0$ für $\underline{\underline{x = 4}}$
	c)	$2^{x} - 3^{x-1} = 3^{x} - 2^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x} + 4\cdot 2^{x} = 3^{x}\left(1 + \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 5\cdot 2^{x} = \frac{4}{3}\cdot 3^{x}$ $\Leftrightarrow \frac{15}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\ln\left(\frac{4}{15}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 3,26}}$
	d)	$2^{2x-2} - 2^{x} = 8$; $u = 2^{x}$ ergibt $0,25u^2 - u - 8 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 8$; $u_2 = -4 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$
	e)	$0,5\cdot 2^{2+x} - 0,25 = 0 \Leftrightarrow 2^{2+x} = 0,5 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{\ln(0,5)}{\ln(2)} - 2 = -3}}$
	f)	$3^{x} + 9\cdot 3^{-x} = 10$; $u = 3^{x}$ ergibt $u^2 - 10u + 9 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 9$; $u_2 = 1$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2}}$; $\underline{\underline{x_2 = 0}}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$xe^{kx}-kx=0$ $x\left(e^{kx}-k\right)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$ unabhängig von k; $\underline{\underline{x_2=\frac{\ln(k)}{k}}}$ für $k>0$
	b)	$e^{kx}-ke^{x}=0$ $e^{kx}-ke^{x}=0 \mid :e^{x} \Rightarrow e^{(k-1)x}=k \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{\ln(k)}{k-1}}}$ für $k>0$ und $k\neq 1$
	c)	$-2e^{-x}+2ke^{-2x}=0$ $-2e^{-2x}\left(e^{x}-k\right)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln(k)}}$ für $k>0$

E5	Ergebnisse	
	a)	$\frac{3}{2}e-\frac{1}{4}e^{-x}=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=-\ln(6)-1}}$
	b)	$2e^{x}-\frac{1}{2}e^{3x}=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln(2)}}$
	c)	$ke^{\frac{1}{k}x}-4k=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=k\cdot\ln(4)}}$
	d)	$2xe^{x}=7x \Rightarrow \underline{\underline{x_1=0}};\ \underline{\underline{x_2=\ln\left(\frac{7}{2}\right)}}$
	e)	$e^{x}-20e^{-x}=1 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln(5)}}$
	f)	$\frac{1}{2}e^{2x}+18e^{-2x}=\frac{13}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x_1=\ln(3)}};\ \underline{\underline{x_2=\ln(2)}}$

E6	Ergebnisse	
	a)	$\left(-\frac{4}{5}e^{2x}+4\right)\left(x^2+1\right)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{2}\ln(5)}}$
	b)	$\frac{1}{2}\left(2-e^{x}\right)^2=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln(2)}}$
	c)	$e^{x}\left(4-2e^{x}\right)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln(2)}}$
	d)	$-ex+3x^2=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1=0}};\ \underline{\underline{x_2=\frac{e}{3}}}$
	e)	$xe^{-x}-ke^{-x}=e^{-x} \Rightarrow \underline{\underline{x=k+1}}$
	f)	$\frac{1}{2}\left(2k-e^{x}\right)^2=2k^2;\ k>0 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln(4k)}}$

E7	Ergebnisse	
	a)	$\left(2-e^x\right)^2=\left(e^x-3\right)^2 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$
	b)	$\left(\frac{x}{2}+1\right)e^{2-x}=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=-2}}$
	c)	$\frac{1}{2}e^x-8e^{-x}=3 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln(8)}}$
	d)	$1-\frac{2e^x}{e^x+3}=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln(3)}}$
	e)	$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x} \Rightarrow \underline{\underline{x=-\ln(2)}}$
	f)	$\frac{2}{1+e^x}=-\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{2}{3}\right)}}$

E8	Ergebnisse	
	a)	$\frac{2x}{e^x+1}=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=0}}$
	b)	$e^{2x+4}-3e^{x+2}+2=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1=-2+\ln(2)}};\ \underline{\underline{x_2=-2}}$
	c)	$\frac{e^x}{e^x-2}=e^x\ ;\ x\neq\ln 2 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln(3)}}$
	d)	$-2e^x-2e^{-x}+5=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1=-\ln(2)}};\ \underline{\underline{x_2=\ln(2)}}$
	e)	$(x-k)e^{x+k}=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=k}}$
	f)	$\frac{e^x-k}{e^x+k}=0\ ;\ k>0 \Rightarrow \underline{\underline{x=\ln(k)}}$

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

a)

$$e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$$

Substitution: $e^{x} = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^{2}$

$\Leftrightarrow u^{2} - 3u - 4 = 0$

quadratische Gleichung

$\Rightarrow p = -3\,;\, q = -4$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^{2} - q = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2} + 4 = \frac{9}{4} + \frac{16}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ u_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

$u_1 = 4 \Leftrightarrow e^{x} = 4 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right) = \ln(4) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln(4)}}$

$u_2 = -1$

$\Leftrightarrow e^{x} = -1$ keine Lösung

A1 Ausführliche Lösung

b)

$$4 - 3e^{-0,5x} = e^{0,5x}$$

$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} + 3e^{-\frac{1}{2}x} - 4 = 0$

Substitution: $e^{\frac{1}{2}x} = u \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} = u^{-1}$

$\Leftrightarrow u + 3u^{-1} - 4 = 0 \mid \cdot u$

$\Leftrightarrow u^{2} + 3 - 4u = 0$

$\Leftrightarrow u^{2} - 4u + 3 = 0$

quadratische Gleichung

$\Rightarrow p = -4\,;\, q = 3$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^{2} - q = \left(-\frac{4}{2}\right)^{2} - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} u_1 = 2 + 1 = 3 \\ u_2 = 2 - 1 = 1 \end{array} \right.$$

$u_1 = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 3 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(3) \mid \cdot 2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 2 \cdot \ln(3)}}$

$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 1 \mid \ln(\ )$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \underbrace{\ln(1)}_{=0}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

A2 Ausführliche Lösungen

a)

$$e^{2x} - 2e^{-x} = 0 \mid +2e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} = 2e^{-x} \mid \ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(2e^{-x}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x = \ln(2) - x \mid +x$$
$$\Leftrightarrow 3x = \ln(2) \mid :3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\ln(2)$$

b)

$$4e^{x} - \frac{e^{-x}}{3} = 0 \mid \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow 12e^{x} - e^{-x} = 0 \mid +e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow 12e^{x} = e^{-x} \mid \ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln(12) + x = -x \mid +x - \ln(12)$$
$$\Leftrightarrow 2x = -\ln(12) \mid :2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(12)$$

A2 Ausführliche Lösung

c)

$$\left(e^{-x} - 1\right)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow e^{-2x} - 2e^{-x} + 1 = 9 \mid -9$$
$$\Leftrightarrow e^{-2x} - 2e^{-x} - 8 = 0$$

Substitution: $e^{-x} = u \Leftrightarrow e^{-2x} = u^2$

$$\Leftrightarrow u^2 - 2u - 8 = 0$$

quadratische Gleichung

$$\Rightarrow p = -2\,;\, q = -8$$
$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{2}{2}\right)^2 + 8 = 1 + 8 = 9$$
$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$
$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \ \left|\ \begin{array}{l} u_1 = 1 + 3 = 4 \\ u_2 = 1 - 3 = -2 \end{array}\right.$$
$$u_1 = 4 \Leftrightarrow e^{-x} = 4 \mid \ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow -x = \ln(4) \mid \cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow x = -\ln(4)$$
$$u_2 = -2 \Leftrightarrow e^{-x} = -2$$

hat keine Lösung

A2 Ausführliche Lösung

d)

$$-\frac{2}{5}e^{0{,}5x} + e^{-x} = 0 \mid \cdot\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{2}e^{-x} = 0 \mid +\frac{5}{2}e^{-x}$$
$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = \frac{5}{2}e^{-x} \mid \ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{5}{2}\right) - x \mid +x$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \mid \cdot\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0{,}611$$

Lösungsweg:

Nach einfacher algebraischen Umformung (Multiplikation mit -5/2) werden die beiden Summanden getrennt, so dass auf jeder Seite der Gleichung logarithmiert werden kann.
Durch Logarithmieren mit dem Logarithmus zur Basis e (auch Logarithmus naturalis genannt), entsteht eine Gleichung mit der Variablen x, bei der x nicht mehr im Exponenten vorhanden ist.
Die Lösung erhält man, indem die Gleichung nach den Variablen x umgeformt wird.

A3	Ausführliche Lösung	
a)	$2^{x-2} = 23 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow (x-2)\cdot\ln(2) = \ln(23) \mid : \ln(2)$ $\Leftrightarrow x-2 = \frac{\ln(23)}{\ln(2)} \mid +2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\ln(23)}{\ln(2)}}} + 2 \approx 6{,}524$	Lösungsvariante: $2^{x-2} = 23 \mid \log_2(\ )$ $\Leftrightarrow x-2 = \log_2(23) \mid +2$ $\Leftrightarrow x = \log_2(23) + 2$ mit $\log_a(b) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$ wird $\underline{\underline{x = \frac{\ln(23)}{\ln(2)}}} + 2 \approx 6{,}524$

A3	Ausführliche Lösung	
b)	$5^{x+3} - 5^{3x-5} = 0 \mid +5^{3x-5}$ $\Leftrightarrow 5^{x+3} = 5^{3x-5} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow (x+3)\cdot\ln(5) = (3x-5)\cdot\ln(5) \mid : \ln(5)$ $\Leftrightarrow x+3 = 3x-5 \mid -x$ $\Leftrightarrow 3 = 2x-5 \mid +5$ $\Leftrightarrow 8 = 2x \mid : 2$ $\Leftrightarrow 4 = x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}$	Lösungsvariante: $5^{x+3} - 5^{3x-5} = 0 \mid +5^{3x-5}$ $\Leftrightarrow 5^{x+3} = 5^{3x-5} \mid \log_5(\ )$ $\Leftrightarrow x+3 = 3x-5 \mid -x$ $\Leftrightarrow 3 = 2x-5 \mid +5$ $\Leftrightarrow 8 = 2x \mid : 2$ $\Leftrightarrow 4 = x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}$

A3 Ausführliche Lösung

c)

$$2^x - 3^{x-1} = 3^x - 2^{x+2} \quad | +2^{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^{x+2} - 3^{x-1} = 3^x \quad | +3^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^2 = 3^x + 3^x \cdot 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 4 \cdot 2^x = 3^x + \frac{1}{3} 3^x$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^x = \frac{4}{3} \cdot 3^x \quad |:5$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{4}{15} \cdot 3^x \quad |:3^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{15} \quad | \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{4}{15}\right) \quad |: \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\ln\left(\frac{4}{15}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}}} \approx 3{,}26$$

Lösungsweg:

Die Gleichung wird so umgeformt, dass auf jeder Seite nur Potenzen mit gleichen Basen stehen.

Potenzgesetz:
Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.
Anwendung des Gesetzes führt dazu, dass es nur noch die Basen 2 und 3 mit dem Exponenten x gibt.

Potenzgesetz:
Potenzen mit ungleichen Basen aber gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten beibehält.

Logarithmieren beider Seiten führt zum Ergebnis.

A3 Ausführliche Lösung

d)

$$2^{2x-2} - 2^x = 8 \quad | -8$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x-2} - 2^x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} \cdot 2^{-2} - 2^x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} 2^{2x} - 2^x - 8 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$$

Substitution: $2^x = u \Leftrightarrow 2^{2x} = u^2$

$$\Leftrightarrow u^2 - 4u - 32 = 0$$

quadratische Gleichung

$$\Rightarrow p = -4\,;\ q = -32$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{4}{2}\right)^2 + 32$$

$$= 4 + 32 = 36$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{36} = 6$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \Big| \quad u_1 = 2 + 6 = 8, \quad u_2 = 2 - 6 = -4$$

$$u_1 = 8 \Leftrightarrow 2^x = 8$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3}} \text{ denn } 2^3 = 8$$

$$u_2 = -4 \Leftrightarrow 2^x = -4$$

hat keine Lösung

A3 Ausführliche Lösung

e)

$$0{,}5\cdot 2^{2+x}-0{,}25=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2^{2+x}-\frac{1}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2^{2}\cdot 2^{x}-\frac{1}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot 2^{x}-\frac{1}{4}=0\,|:2$$
$$\Leftrightarrow 2^{x}-\frac{1}{8}=0\,|+\frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow 2^{x}=\frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow x=\underline{\underline{-3}}\text{ denn } 2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

Lösungsweg:

Dezimalzahlen werden in Brüche verwandelt.

Potenzgesetz:
Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.
Anwendung des Gesetzes führt dazu, dass die Potenz zur Basis 2 nur noch die Variable x im Exponenten hat.

Anwendung der Regel für negative Exponenten.

A3 Ausführliche Lösung

f)

$$3^{x}+9\cdot 3^{-x}=10\,|-10$$
$$\Leftrightarrow 3^{x}+9\cdot 3^{-x}-10=0\,|\cdot 3^{x}$$
$$\Leftrightarrow 3^{2x}+9-10\cdot 3^{x}=0$$
$$\Leftrightarrow 3^{2x}-10\cdot 3^{x}+9=0$$

Substitution: $3^{x}=u \Leftrightarrow 3^{2x}=u^{2}$

$$\Leftrightarrow u^{2}-10u+9=0$$

quadratische Gleichung

$$\Rightarrow p=-10\,;\,q=9$$
$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^{2}-q=\left(-\frac{10}{2}\right)^{2}-9$$
$$=25-9=16$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{16}=4$$
$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}u_1=5+4=9\\ u_2=5-4=1\end{array}\right.$$
$$u_1=9\Leftrightarrow 3^{x}=9$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=2}}\text{ denn } 3^{2}=9$$
$$u_2=1\Leftrightarrow 3^{x}=1$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=0}}\text{ denn } 3^{0}=1$$

A4 Ausführliche Lösungen

a)

$$x\cdot e^{k\cdot x}-k\cdot x=0\,|\text{ x ausklammern}$$
$$\Leftrightarrow x\left(e^{k\cdot x}-k\right)=0\Rightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$$
$$\Leftrightarrow e^{k\cdot x}-k=0\,|\ln(\;)$$
$$\Leftrightarrow k\cdot x=\ln(k)\,|:k$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=\frac{1}{k}\ln(k)\text{ für } k>0}}$$

b)

$$e^{k\cdot x}-k\cdot e^{x}=0\,|+k\cdot e^{x}$$
$$\Leftrightarrow e^{k\cdot x}=k\cdot e^{x}\,|\ln(\;)$$
$$\Leftrightarrow k\cdot x=\ln(k)+x\,|-x$$
$$\Leftrightarrow k\cdot x-x=\ln(k)$$
$$\Leftrightarrow x(k-1)=\ln(k)\,|\,k-1$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{k-1}\ln(k)\text{ für } k>0\text{ und } k\neq 1}}$$

A4	Ausführliche Lösung		
	c)	$-2e^{-x}+2k\cdot e^{-2x}=0 \mid :(-2)$ $\Leftrightarrow e^{-x}-k\cdot e^{-2x}=0 \mid +k\cdot e^{-2x}$ $\Leftrightarrow e^{-x}=k\cdot e^{-2x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow -x=\ln(k)-2x \mid +2x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln(k)}}$ für $k>0$	Lösungsweg: Die Potenzen zur Basis e werden auf unterschiedliche Seiten der Gleichung gebracht, damit die Gleichung logarithmierbar wird. Anwendung der Logarithmengesetze führt zu einer Gleichung in x.

A5	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\frac{3}{2}e-\frac{1}{4}e^{-x}=0 \mid +\frac{1}{4}e^{-x}$ $\Leftrightarrow \frac{3}{2}e=\frac{1}{4}e^{-x} \mid \cdot\frac{2}{3}$ $\Leftrightarrow e=\frac{2}{12}e^{-x}=\frac{1}{6}e^{-x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 1=\ln\left(\frac{1}{6}\right)-x \mid +x$ $\Leftrightarrow 1+x=\ln\left(\frac{1}{6}\right) \mid -1$ $\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{6}\right)-1=\underbrace{\ln(1)}_{=0}-\ln(6)-1$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=-\ln(6)-1}}$	b)	$2e^{x}-\frac{1}{2}e^{3x}=0 \mid +\frac{1}{2}e^{3x}$ $\Leftrightarrow 2e^{x}=\frac{1}{2}e^{3x} \mid :2$ $\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{4}e^{3x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{4}\right)+3x \mid -3x$ $\Leftrightarrow -2x=\underbrace{\ln(1)}_{=0}-\ln(4) \mid :(-2)$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(4)=\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right)=\ln\left(\sqrt{4}\right)=\ln(2)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln(2)}}$

A5	Ausführliche Lösungen			
	c)	$k\cdot e^{\frac{1}{k}x}-4k=0 \mid +4k$ $\Leftrightarrow k\cdot e^{\frac{1}{k}x}=4k \mid :k$ $\Leftrightarrow e^{\frac{1}{k}x}=4 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \frac{1}{k}x=\ln(4) \mid \cdot k$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=k\cdot\ln(4)}}$	d)	$2x\cdot e^{x}=7x \mid -7x$ $\Leftrightarrow 2x\cdot e^{x}-7x=0 \mid$ x ausklammern $\Leftrightarrow x\left(2\cdot e^{x}-7\right)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$ $\Leftrightarrow 2\cdot e^{x}-7=0 \mid +7$ $\Leftrightarrow 2\cdot e^{x}=7 \mid :2$ $\Leftrightarrow e^{x}=\frac{7}{2} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{7}{2}\right)}}=\ln(7)-\ln(2)$

A5	Ausführliche Lösung	
	e)	$e^x - 20e^{-x} = 1 \mid \cdot e^x$ $\Leftrightarrow e^{2x} - 20 = e^x \mid -e^x$ $\Leftrightarrow e^{2x} - 20 - e^x = 0$ $\Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 20 = 0$ Substitution: $e^x = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^2$ $\Leftrightarrow u^2 - u - 20 = 0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p = -1;\, q = -20$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 20$ $= \frac{1}{4} + \frac{80}{4} = \frac{81}{4}$
		$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ $\quad u_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5$; $\quad u_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{8}{2} = -4$ $u_1 = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow x = \ln(5)$ $u_2 = -4 \Leftrightarrow e^x = -4$ hat keine Lösung

A5	Ausführliche Lösung	
	f)	$\frac{1}{2}e^{2x} + 18e^{-2x} = \frac{13}{2} \mid \cdot e^{2x}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{4x} + 18 = \frac{13}{2} \cdot e^{2x} \mid -\frac{13}{2} \cdot e^{2x}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{4x} - \frac{13}{2} \cdot e^{2x} + 18 = 0 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow e^{4x} - 13 \cdot e^{2x} + 36 = 0$ Substitution: $e^{2x} = u \Leftrightarrow e^{4x} = u^2$ $\Leftrightarrow u^2 - 13u + 36 = 0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p = -13;\, q = 36$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{13}{2}\right)^2 - 36$ $= \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4}$
		$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ $\quad u_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = \frac{18}{2} = 9$; $\quad u_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ $u_1 = 9 \Leftrightarrow e^{2x} = 9 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(9) \mid :2$ $\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ln(9) = \ln(3)$ $u_2 = 4 \Leftrightarrow e^{2x} = 4 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(4) \mid :2$ $\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}\ln(4) = \ln(2)$

A6	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\left(-\frac{4}{5}e^{2x}+4\right)\left(x^2+1\right)=0$ $\Leftrightarrow x^2+1=0 \mid -1$ $\Leftrightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ keine Lösung $\Leftrightarrow -\frac{4}{5}e^{2x}+4=0 \mid -4$ $\Leftrightarrow -\frac{4}{5}e^{2x}=-4 \mid \cdot\left(-\frac{5}{4}\right)$ $\Leftrightarrow e^{2x}=5 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 2x=\ln(5):2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{2}\cdot\ln(5)}}$	b)	$\frac{1}{2}\left(2-e^x\right)^2=0 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow \left(2-e^x\right)^2=0$ $\Leftrightarrow \left(2-e^x\right)\cdot\left(2-e^x\right)=0$ $\Leftrightarrow 2-e^x=0 \mid +e^x$ $\Leftrightarrow 2=e^x \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(2)=x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln(2)}}$ ist doppelte Nullstelle wegen $\left(2-e^x\right)\cdot\left(2-e^x\right)=0$

A6	Ausführliche Lösungen			
	c)	$e^x\left(4-2e^x\right)=0$ $\Leftrightarrow e^x=0$ hat keine lösung $\Leftrightarrow 4-2e^x=0 \mid +2e^x$ $\Leftrightarrow 4=2e^x \mid :2$ $\Leftrightarrow 2=e^x \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(2)=x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln(2)}}$	d)	$-e\cdot x+3x^2=0 \mid$ x ausklammern $\Leftrightarrow x(3x-e)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$ $\Leftrightarrow 3x-e=0 \mid +e$ $\Leftrightarrow 3x=e \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=\frac{1}{3}e}}$

A6	Ausführliche Lösungen			
	e)	$x\cdot e^{-x}-k\cdot e^{-x}=e^{-x} \mid -e^{-x}$ $\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}-k\cdot e^{-x}-e^{-x}=0$ $\Leftrightarrow e^{-x}(x-k-1)=0$ $\Leftrightarrow e^{-x}=0 \Rightarrow$ keine Lösung $\Leftrightarrow x-k-1=0 \mid +1$ $\Leftrightarrow x-k=1 \mid +k$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1+k}}$	f)	$\frac{1}{2}\left(2k-e^x\right)^2=2k^2\ ; k>0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2k-e^x\right)^2=2k^2 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow \left(2k-e^x\right)^2=4k^2$ $\Leftrightarrow 4k^2-4k\cdot e^x+e^{2x}=4k^2 \mid -4k^2$ $\Leftrightarrow -4k\cdot e^x+e^{2x}=0 \mid +4k\cdot e^x$ $\Leftrightarrow e^{2x}=4k\cdot e^x \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 2x=\ln(4k)+x \mid -x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln(4k)}}$

A7	Ausführliche Lösungen		
a)	$\left(2-e^x\right)^2=(x-3)^2$ $\Leftrightarrow 4-4e^x+e^{2x}=e^{2x}-6e^x+9 \mid -e^{2x}$ $\Leftrightarrow 4-4e^x=-6e^x+9 \mid +6e^x$ $\Leftrightarrow 4+2e^x=9 \mid -4$ $\Leftrightarrow 2e^x=5 \mid :2$ $\Leftrightarrow e^x=\frac{5}{2} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$	b)	$\left(\frac{x}{2}+1\right)\cdot e^{2-x}=0$ $\Leftrightarrow e^{2-x}=0 \Rightarrow$ keine Lösung $\Leftrightarrow \frac{x}{2}+1=0 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow x+2=0 \mid -2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=-2}}$

A7	Ausführliche Lösung	
c)	$\frac{1}{2}e^x-8e^{-x}=3 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow e^x-16e^{-x}=6 \mid \cdot e^x$ $\Leftrightarrow e^{2x}-16=6e^x \mid -6e^x$ $\Leftrightarrow e^{2x}-6e^x-16=0$ Substitution: $e^x=u \Leftrightarrow e^{2x}=u^2$ $\Leftrightarrow u^2-6u-16=0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p=-6\,;\,q=-16$ $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{6}{2}\right)^2+16$ $=9+16=25$	$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{25}=5$ $u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\left\lvert \begin{array}{l} u_1=3+5=8 \\ u_2=3-5=-2 \end{array}\right.$ $u_1=8 \Leftrightarrow e^x=8 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln(8)}}$ $u_2=-2 \Leftrightarrow e^x=-2$ $\Rightarrow$ keine Lösung

A7	Ausführliche Lösung	
d)	$1-\frac{2e^x}{e^x+3}=0 \mid +\frac{2e^x}{e^x+3}$ $\Leftrightarrow 1=\frac{2e^x}{e^x+3} \mid \cdot\left(e^x+3\right)$ $\Leftrightarrow e^x+3=2e^x \mid -e^x$ $\Leftrightarrow 3=e^x \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln(3)}}$	Lösungsweg: Die Summanden werden getrennt. Die Bruchgleichung wird mit dem Nenner der rechten Seite multipliziert. So entsteht eine Gleichung ohne Brüche. Umformen und logarithmieren führt zum Ergebnis.

A7 Ausführliche Lösung

e)

$$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}\;|\cdot e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}+5e^{2x}=e^{x}\;|-e^{x}$$

$$\Leftrightarrow 5e^{2x}-e^{x}-\frac{3}{4}=0\;|:5$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-\frac{1}{5}e^{x}-\frac{3}{20}=0$$

Substitution: $e^{x}=u \Leftrightarrow e^{2x}=u^{2}$

$$\Leftrightarrow u^{2}-\frac{1}{5}u-\frac{3}{20}=0$$

quadratische Gleichung

$$\Rightarrow p=-\frac{1}{5};\;q=-\frac{3}{20}$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^{2}-q=\left(-\frac{1}{10}\right)^{2}+\frac{3}{20}$$

$$=\frac{1}{100}+\frac{15}{100}=\frac{16}{100}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{16}{100}}=\frac{4}{10}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l} u_{1}=\frac{1}{10}+\frac{4}{10}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}\\ u_{2}=\frac{1}{10}-\frac{4}{10}=-\frac{3}{10}\end{array}\right.$$

$$u_{1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2}\;|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\underbrace{\ln(1)}_{=0}-\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=-\ln(2)}}$$

$$u_{2}=-\frac{3}{10}\Leftrightarrow e^{x}=-\frac{3}{10}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung

A7 Ausführliche Lösung

f)

$$\frac{2}{1+e^{x}}=-\frac{e^{x}-4}{(1+e^{x})^{2}}\;|\cdot(1+e^{x})$$

$$\Leftrightarrow 2=-\frac{e^{x}-4}{1+e^{x}}\;|\cdot(1+e^{x})$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot(1+e^{x})=-(e^{x}-4)$$

$$\Leftrightarrow 2+2e^{x}=-e^{x}+4\;|+e^{x}$$

$$\Leftrightarrow 2+3e^{x}=4\;|-2$$

$$\Leftrightarrow 3e^{x}=2\;|:3$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{2}{3}\;|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{2}{3}\right)}}$$

Lösungsweg:

Zweifache Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite lässt den Bruchterm verschwinden.
Bei der algebraischen Umformung ist darauf zu achten, dass der Bruchstrich die Klammer ersetzt.

Ausmultiplizieren und weitere algebraische Umformungen führen zu einer Gleichung, die sich leicht logarithmieren lässt.

A8	Ausführliche Lösung	
a)	$\frac{2x}{e^x+1}=0 \mid \cdot\left(e^x+1\right)$ $\Leftrightarrow 2x=0 \mid :2$ $\Leftrightarrow x=\underline{\underline{0}}$	Lösungsweg: Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite lässt den Bruchterm verschwinden.

A8	Ausführliche Lösung	
b)	$e^{2x+4}-3e^{x+2}+2=0$ Substitution: $e^{x+2}=u \Leftrightarrow e^{2x+4}=u^2$ $\Leftrightarrow u^2-3u+2=0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p=-3\,;\, q=2$ $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2$ $=\frac{9}{4}+\frac{8}{4}=\frac{1}{4}$	$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ $u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\quad u_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$; $\quad u_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$ $u_1=2 \Leftrightarrow e^{x+2}=2 \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow x+2=\ln(2) \mid -2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=\ln(2)-2}}$ $u_2=1 \Leftrightarrow e^{x+2}=2 \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow x+2=\underbrace{\ln(1)}_{=0} \mid -2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=-2}}$

A8	Ausführliche Lösung	
c)	$\frac{e^x}{e^x-2}=e^x\,;\, x\neq\ln(2)$ $\frac{e^x}{e^x-2}=e^x \mid \cdot\left(e^x-2\right)$ $\Leftrightarrow e^x=e^{2x}-2e^x \mid +2e^x$ $\Leftrightarrow 3e^x=e^{2x} \mid \ln(\;)$ $\Leftrightarrow \ln(3)+x=2x \mid -\ln(3)$ $\Leftrightarrow x=2x-\ln(3) \mid \cdot(-1)$ $\Leftrightarrow x=\underline{\underline{\ln(3)}}$	Lösungsweg: Die Definitionsmenge ist eingeschränkt, da der Nenner der linken Seite nicht Null werden darf. Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite lässt den Bruchterm verschwinden. Algebraische Umformungen ermöglichen das Logarithmieren.

A8	Ausführliche Lösung	
d)	$-2e^x - 2e^{-x} + 5 = 0 \mid \cdot e^x$ $\Leftrightarrow -2e^{2x} - 2 + 5e^x = 0 \mid : (-2)$ $\Leftrightarrow e^{2x} - \frac{5}{2}e^x + 1 = 0$ Substitution: $e^x = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^2$ $\Leftrightarrow u^2 - \frac{5}{2}u + 1 = 0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p = -\frac{5}{2};\, q = 1$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 1$ $= \frac{15}{16} + \frac{16}{16} = \frac{9}{16}$	$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ $\left\lvert \begin{array}{l} u_1 = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ u_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$ $u_1 = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(2)}}$ $u_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -\ln(2)}}$

A8	Ausführliche Lösungen		
e)	$(x-k)\cdot e^{x+k} = 0$ $\Leftrightarrow e^{x+k} = 0 \Rightarrow$ keine Lösung $\Leftrightarrow x - k = 0 \mid +k$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = k}}$	f)	$\frac{e^x - k}{e^x + k} = 0;\, k > 0$ $\frac{e^x - k}{e^x + k} = 0 \mid \cdot (e^x + k)$ $\Leftrightarrow e^x - k = 0 \mid +k$ $\Leftrightarrow e^x = k \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln(k)}}$ für $k > 0$

Logarithmengesetze:

Logarithmus eines Produktes	
Logarithmus zur Basis a: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$ Logarithmus zur Basis 10: $\lg(b \cdot c) = \lg(b) + \lg(c)$ Logarithmus zur Basis e: $\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.
Beispiel zum Logarithmus zur Basis e: $\ln(500) = \ln(5 \cdot 100) = \ln(5) + \ln(100) \approx 6{,}215$	

Logarithmus eines Quotienten	
Logarithmus zur Basis a: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$ Logarithmus zur Basis 10: $\lg\left(\frac{b}{c}\right) = \lg(b) - \lg(c)$ Logarithmus zur Basis e: $\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner).
Beispiel zum Logarithmus zur Basis e: $\ln\left(\frac{343}{7}\right) = \ln(343) - \ln(7) \approx 3{,}892$	

Logarithmus einer Potenz	
Logarithmus zur Basis a: $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$ Logarithmus zur Basis 10: $\lg(b^c) = c \cdot \lg(b)$ Logarithmus zur Basis e: $\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$	Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multipliziert mit dem Exponenten.
Beispiel zum Logarithmus zur Basis e: $\ln(3^5) = 5 \cdot \ln(3) \approx 5{,}493$ $\ln(\sqrt{5}) = \ln\left(5^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(5) \approx 0{,}805$	

Logarithmus von der Basis	
$\log_a(a) = \lg(10) = \ln(e) = 1$	Der Logarithmus zur Basis a von der Basis a ist 1.
Beispiel zum Logarithmus zur Basis e: $\ln(e^{2x}) = 2x \cdot \ln(e) = 2x \cdot 1 = 2x$	

Logarithmus von der Zahl 1	
$\log_a(1) = \lg(1) = \ln(1) = 0$	Der Logarithmus der Zahl 1 ist in jedem Logarithmensystem gleich Null.

Die wichtigsten Potenzgesetze:

Multiplikation und Division		
bei gleichen Basen:	$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$	$a \in \mathbb{R} \quad m,n \in \mathbb{Q}$
	$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$	$a \in \mathbb{R}^* \quad m,n \in \mathbb{Q}$
bei gleichen Exponenten	$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$	$a,b \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{Q}$
	$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$	$a,b \in \mathbb{R}^* \quad n \in \mathbb{Q}$
Potenzieren von Potenzen	$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$	$a \in \mathbb{R} \quad m,n \in \mathbb{Q}$
Radizieren von Potenzen	$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$	$a \in \mathbb{R}_+^* \quad m \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N}^*$
Folgerungen aus den Potenzgesetzen:	$\boxed{a^0 = 1 \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}}$	$a \in \mathbb{R}^* \quad n \in \mathbb{Q}$

Logarithmus im Exponenten.		
$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b \Leftrightarrow a^{\log_a(b)} = b$	Zahlenbeispiel: $2 = a^{\log_a(2)}$	Vielfach sind für Termumformungen nebenstehende Beziehungen nützlich.
$x = \lg(b) \Leftrightarrow 10^x = b \Leftrightarrow 10^{\lg(b)} = b$	Zahlenbeispiel: $5 = 10^{\lg(5)}$	
$x = \ln(b) \Leftrightarrow e^x = b \Leftrightarrow e^{\ln(b)} = b$	Zahlenbeispiel: $9 = e^{\ln(9)}$	
speziell: $b^x = a^{x \cdot \log_a(b)} = 10^{x \cdot \lg(b)} = e^{x \cdot \ln(b)}$		

Umrechnung von einem Logarithmensystem in ein anderes.

$\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$	$\log_3(5) = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1{,}4649735$