Lösungen Exponentialgleichungen II

Ergebnisse

E1	Ergebnisse			
	a)	$\frac{1}{3}e^{-2x}-2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}\ln(6)$	b)	$2e^{x+1}-6=0 \Rightarrow x=\ln(3)-1$
	c)	$2e^{x}+3x\cdot e^{x}=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$	d)	$(2+3x)e^{x-1}=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

E2	Ergebnisse			
	a)	$4e^{2x}-3e^{x}=0 \Rightarrow x=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	b)	$\frac{1}{2}e^{x}-\frac{e}{4}-2=0 \Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{2}e+4\right)$
	c)	$3e^{2-x}=4 \Rightarrow x=2-\ln\left(\frac{4}{3}\right)$	d)	$2x\cdot e^{x}-4x=0$ $\Rightarrow x_1=0\,;\,x_2=\ln(2)$

E3	Ergebnisse			
	a)	$2e^{x}-e^{2x}=0 \Rightarrow x=\ln(2)$	b)	$4e^{2x}-3e^{x}=0 \Rightarrow x=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

E4	Ergebnisse			
	a)	$\frac{1}{2}e^{x}-10e^{-x}+\frac{1}{2}=0$ $\Rightarrow x=\ln(4)$	b)	$-\frac{1}{10}e^{x}-\frac{1}{2}+5e^{-x}=0$ $\Rightarrow x=\ln(5)$
	c)	$e^{2x}-5e^{x}+4=0$ $\Rightarrow x_1=\ln(4)\,;\,x_2=0$	d)	$2e^{x}+8e^{-x}=10$ $\Rightarrow x_1=\ln(4)\,;\,x_2=0$

E5	Ergebnisse			
	a)	$3e^{2x}-6e^{x}=0 \Rightarrow x=\ln(2)$	b)	$4e^{-3x}-2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}\ln(2)$
	c)	$\frac{5x}{e^{2x}+1}=0 \Rightarrow x=0$	d)	$e^{x}\left(e^{x}-3\right)=0 \Rightarrow x=\ln(3)$

E6	Ergebnisse			
	a)	$(x-3)e^{x}-e^{x}=0 \Rightarrow x=4$	b)	$e^{x+1}-3=0 \Rightarrow x=\ln(3)-1$
	c)	$e^{\frac{1}{2}x}-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x=2\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	d)	$(3+5x)e^{3-4x}=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{5}$

E7	Ergebnisse			
	a)	$\frac{1}{3}e^{-2x}-\frac{10}{3}e^{-x}+3=0$ $\Rightarrow x_1=0\,;\,x_2=-\ln(9)$	b)	$8-6e^{-\frac{1}{4}x}-2e^{\frac{1}{4}x}=0$ $\Rightarrow x_1=4\cdot\ln(3)\,;\,x_2=0$
	c)	$\frac{1}{4}e^{x}-4e^{-x}-\frac{3}{2}=0\Rightarrow x=\ln(8)$	d)	$e^{x}+e^{-x}-\frac{5}{2}=0$ $\Rightarrow x_1=\ln(2)\,;\,x_2=-\ln(2)$
	e)	$-3e^{-2x}+20-4e^{-x}=0$ $\Rightarrow x=-\ln(2)$	f)	$\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{15}{2}e^{x}+\frac{27}{8}=0$ $\Rightarrow x_1=\ln\left(\frac{9}{2}\right);\,x_2=-\ln(2)$

E8	Ergebnisse			
	a)	$2e^{-x}-3e^{x}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$	b)	$\left(e^{2x+1}-1\right)\left(e+1\right)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$
	c)	$4e^{x}+2x\cdot e^{x}=0\Rightarrow x=-2$	d)	$\left(e^{x+1}-2\right)\left(e^{2x}-4\right)=0$ $\Rightarrow x_1=\ln(2)-1\,;\,x_2=\ln(2)$

Wie gehe ich vor?

Wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Exponentialgleichung so umzuformen, dass sich Potenzen mit gleichen Basen ergeben, dann ist eine Lösung mittels Exponentialvergleich möglich.

In vielen Fällen führt der Ansatz über das Logarithmieren zum Erfolg.

Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden. Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

Ausführliche Lösungen

A1	**Aufgabe**			
	Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen			
	a)	$\frac{1}{3}e^{-2x}-2=0$	b)	$2e^{x+1}-6=0$
	c)	$2e^{x}+3x\cdot e^{x}=0$	d)	$(2+3x)e^{x-1}=0$

A1	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\frac{1}{3}e^{-2x}-2=0 \mid +2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{3}e^{-2x}=2 \mid \cdot 3$ $\Leftrightarrow e^{-2x}=6 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{-2x}\right)=\ln(6)$ $\Leftrightarrow -2x=\ln(6) \mid :(-2)$ $\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\ln(6)$ Lösung durch logarithmieren	b)	$2e^{x+1}-6=0 \mid +6$ $\Leftrightarrow 2e^{x+1}=6 \mid :2$ $\Leftrightarrow e^{x+1}=3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{x+1}\right)=\ln(3)$ $\Leftrightarrow x+1=\ln(3) \mid -1$ $\Leftrightarrow x=\ln(3)-1$ Lösung durch logarithmieren

A1	Ausführliche Lösungen			
	c)	$2e^{x}+3x\cdot e^{x}=0$ $\Leftrightarrow (2+3x)e^{x}=0$ mit $e^{x}\neq 0$ $\Leftrightarrow 2+3x=0 \mid -2$ $\Leftrightarrow 3x=-2 \mid :3$ $\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$ Lösung durch logarithmieren	d)	$(2+3x)e^{x-1}=0$ mit $e^{x-1}\neq 0$ $\Leftrightarrow 2+3x=0 \mid -2$ $\Leftrightarrow 3x=-2 \mid :3$ $\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$ Lösung durch logarithmieren

A2	**Aufgabe**			
	Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen			
	a)	$4e^{2x}-3e^{x}=0$	b)	$\frac{1}{2}e^{x}-\frac{e}{4}-2=0$
	c)	$3e^{2-x}=4$	d)	$2x\cdot e^{x}-4x=0$

A2	Ausführliche Lösungen			
	a)	$4e^{2x}-3e^{x}=0 \mid +3e^{x}$ $\Leftrightarrow 4e^{2x}=3e^{x} \mid :4$ $\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{3}{4}e^{x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right)=\ln\left(\frac{3}{4}e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 2x=\ln\left(\frac{3}{4}\right)+x\cdot\ln(e)$ $\Leftrightarrow 2x=\ln\left(\frac{3}{4}\right)+x \mid -x$ $\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ Lösung durch logarithmieren	b)	$\frac{1}{2}e^{x}-\frac{e}{4}-2=0 \mid +2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{x}-\frac{e}{4}=2 \mid +\frac{e}{4}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{x}=\frac{e}{4}+2 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow e^{x}=\frac{e}{2}+4 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(\frac{e}{2}+4\right)$ $\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{1}{2}e+4\right)$ Lösung durch logarithmieren

A2	Ausführliche Lösungen			
	c)	$3e^{2-x}=4 \mid :3$ $\Leftrightarrow e^{2-x}=\frac{4}{3} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{2-x}\right)=\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ $\Leftrightarrow 2-x=\ln\left(\frac{4}{3}\right) \mid -2$ $\Leftrightarrow -x=\ln\left(\frac{4}{3}\right)-2 \mid \cdot(-1)$ $\Leftrightarrow x=2-\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ Lösung durch logarithmieren	d)	$2x\cdot e^{x}-4x=0$ $\Leftrightarrow 2x\left(e^{x}-2\right)=0$ $\Rightarrow x_1=0$ $e^{x}-2=0 \mid +2$ $\Leftrightarrow e^{x}=2 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln(e)$ $\Leftrightarrow x=x_2=\ln(2)$ Lösung durch logarithmieren

A3	**Aufgabe**		
	Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen		
	a) $2e^x - e^{2x} = 0$	b)	$4e^{2x} - 3e^x = 0$

A3 Ausführliche Lösungen

a)

$$2e^x - e^{2x} = 0 \mid +e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow 2e^x = e^{2x} \mid :2$$
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2}e^{2x} \mid \ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(e^{2x}\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(1) - \ln(2) + 2x \mid -2x$$
$$\Leftrightarrow -x = -\ln(2) \mid \cdot(-1)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(2)$$

Lösung durch logarithmieren

b)

$$4e^{2x} - 3e^x = 0 \mid +3e^x$$
$$\Leftrightarrow 4e^{2x} = 3e^x \mid :4$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{3}{4}e^x \mid \ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}e^x\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(e^x\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + x \mid -x$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

Lösung durch logarithmieren

A4	**Aufgabe**		
	Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen		
	a) $\frac{1}{2}e^x - 10e^{-x} + \frac{1}{2} = 0$	b)	$\frac{1}{10}e^x - \frac{1}{2} + 5e^{-x} = 0$
	c) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$	d)	$2e^x + 8e^{-x} = 10$

A4 Ausführliche Lösung

a)

$$\frac{1}{2}e^x - 10e^{-x} + \frac{1}{2} = 0 \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow e^x - 20e^{-x} + 1 = 0 \mid \cdot e^x$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} - 20 + e^x = 0$$

Substitution: $e^x = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^2$

$$\Leftrightarrow u^2 + u - 20 = 0$$
$$\Rightarrow p = 1;\ q = -20$$
$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{80}{4} = \frac{81}{4}$$
$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$$
$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{array}{|l} u_1 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 4 \\ u_2 = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -5 \end{array}$$
$$u_1 = 4 \Leftrightarrow e^x = 4 \mid \ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \ln(4)$$
$$u_2 = -5$$
$$\Leftrightarrow e^x = -5 \text{ keine Lösung}$$

Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution.

A4	Ausführliche Lösung
b)	$-\frac{1}{10}e^x-\frac{1}{2}+5e^{-x}=0 \mid \cdot(-10)e^x$ $\Leftrightarrow e^{2x}+5e^x-50=0$ Substitution: $e^x=u \Leftrightarrow e^{2x}=u^2$ $\Leftrightarrow u^2+5u-50=0$ $\Rightarrow p=5\,;\,q=-50$ $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{5}{2}\right)^2+50$ $=\frac{25}{4}+\frac{200}{4}=\frac{225}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$ $u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\begin{array}{\|l} u_1=-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}=5 \\ u_2=-\frac{5}{2}-\frac{15}{2}=-10 \end{array}$ $u_1=5 \Leftrightarrow e^x=5 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right)=\ln(5) \Leftrightarrow x=\ln(5)$ $u_2=-10$ $\Leftrightarrow e^x=-10$ keine Lösung Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution.

A4	Ausführliche Lösung
c)	$e^{2x}-5e^x+4=0$ Substitution: $e^x=u \Leftrightarrow e^{2x}=u^2$ $\Leftrightarrow u^2-5u+4=0$ $\Rightarrow p=-5\,;\,q=4$ $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4$ $=\frac{25}{4}-\frac{16}{4}=\frac{9}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ $u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\begin{array}{\|l} u_1=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4 \\ u_2=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1 \end{array}$ $u_1=4 \Leftrightarrow e^{x_1}=4 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_1}\right)=\ln(4) \Leftrightarrow x_1=\ln(4)$ $u_2=1 \Leftrightarrow e^{x_2}=1 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_2}\right)=\ln(1) \Leftrightarrow x_2=0$ Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution.

A4	Ausführliche Lösung
d)	$2e^x+8e^{-x}=10 \mid \cdot e^x$ $\Leftrightarrow 2e^{2x}+8=10e^x \mid -10e^x$ $\Leftrightarrow 2e^{2x}-10e^x+8=0 \mid :2$ $\Leftrightarrow e^{2x}-5e^x+4=0$ Substitution: $e^x=u \Leftrightarrow e^{2x}=u^2$ $\Leftrightarrow u^2-5u+4=0$ $\Rightarrow p=-5\,;\,q=4$ $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-4$ $=\frac{25}{4}-\frac{16}{4}=\frac{9}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ $u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\begin{array}{\|l} u_1=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4 \\ u_2=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1 \end{array}$ $u_1=4 \Leftrightarrow e^{x_1}=4 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_1}\right)=\ln(4) \Leftrightarrow x_1=\ln(4)$ $u_2=1 \Leftrightarrow e^{x_2}=1 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_2}\right)=\ln(1) \Leftrightarrow x_2=0$ Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution.

A5	**Aufgabe**			
	Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen			
	a)	$3e^{2x} - 6e^{x} = 0$	b)	$4e^{-3x} - 2 = 0$
	c)	$\frac{5x}{e^{2x}+1} = 0$	d)	$e^{x}\left(e^{x} - 3\right) = 0$

A5	Ausführliche Lösungen			
	a)	$3e^{2x} - 6e^{x} = 0 \mid +6e^{x}$ $\Leftrightarrow 3e^{2x} = 6e^{x} \mid :3$ $\Leftrightarrow e^{2x} = 2e^{x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(2e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(2) + \ln\left(e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(2) + x \mid -x$ $\Leftrightarrow x = \ln(2)$ Lösung durch logarithmieren	b)	$4e^{-3x} - 2 = 0 \mid +2$ $\Leftrightarrow 4e^{-3x} = 2 \mid :4$ $\Leftrightarrow e^{-3x} = \frac{1}{2} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{-3x}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $\Leftrightarrow -3x = \ln(1) - \ln(2) \mid :(-3)$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\ln(2)$ Lösung durch logarithmieren

A5	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\frac{5x}{e^{2x}+1} = 0 \mid \cdot\left(e^{2x}+1\right)$ $\Leftrightarrow 5x = 0$ $\Leftrightarrow x = 0$	d)	$e^{x}\left(e^{x} - 3\right) = 0$ mit $e^{x} \neq 0$ $\Rightarrow e^{x} - 3 = 0 \mid +3$ $\Leftrightarrow e^{x} = 3 \mid \ln(\ ) \Leftrightarrow x = \ln(3)$ Lösung durch logarithmieren

A6	**Aufgabe**			
	Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen			
	a)	$(x-3)e^{x} - e^{x} = 0$	b)	$e^{x+1} - 3 = 0$
	c)	$e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{2} = 0$	d)	$(3+5x)e^{3-4x} = 0$

A6	Ausführliche Lösungen			
	a)	$(x-3)e^{x} - e^{x} = 0$ $\Leftrightarrow \left[(x-3)-1\right]e^{x} = 0$ mit $e^{x} \neq 0$ $\Rightarrow x - 4 = 0 \mid +4$ $\Leftrightarrow x = 4$	b)	$e^{x+1} - 3 = 0 \mid +3$ $\Leftrightarrow e^{x+1} = 3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{x+1}\right) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow x + 1 = \ln(3) \mid -1$ $\Leftrightarrow x = \ln(3) - 1$ Lösung durch logarithmieren

A6 Ausführliche Lösungen

c)

$$e^{\frac{1}{2}x}-\frac{3}{2}=0\;|+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=\frac{3}{2}\;|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln\left(\frac{3}{2}\right)\;|\cdot 2 \Leftrightarrow x=2\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Lösung durch logarithmieren

d)

$$(3+5x)e^{3-4x}=0$$

$$e^{3-4x}\neq 0$$

$$\Rightarrow 3+5x=0\;|-3$$

$$\Leftrightarrow 5x=-3\;|:5$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{5}$$

A7 Aufgabe

Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen

a)	$\frac{1}{3}e^{-2x}-\frac{10}{3}e^{-x}+3=0$	b)	$8-6e^{-\frac{1}{4}x}-2e^{\frac{1}{4}x}=0$
c)	$\frac{1}{4}e^{x}-4e^{-x}-\frac{3}{2}=0$	d)	$e^{x}+e^{-x}-\frac{5}{2}=0$
e)	$-3e^{-2x}+20-4e^{-x}=0$	f)	$\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{15}{2}e^{x}+\frac{27}{8}=0$

A7 Ausführliche Lösung

a)

$$\frac{1}{3}e^{-2x}-\frac{10}{3}e^{-x}+3=0\;|\cdot 3e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 1-10e^{x}+9e^{2x}=0\;|:9$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-\frac{10}{9}e^{x}+\frac{1}{9}=0$$

Substitution: $e^{x}=u \Leftrightarrow e^{2x}=u^2$

$$\Leftrightarrow u^2-\frac{10}{9}u+\frac{1}{9}=0$$

$$\Rightarrow p=-\frac{10}{9};\;q=\frac{1}{9}$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(-\frac{5}{9}\right)^2-\frac{1}{9}$$

$$=\frac{25}{81}-\frac{9}{81}=\frac{16}{81}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{16}{81}}=\frac{4}{9}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\qquad u_1=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=1\qquad u_2=\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$$

$$u_1=1\Leftrightarrow e^{x_1}=1\;|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_1}\right)=\ln(1)\Leftrightarrow x_1=0$$

$$u_2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow e^{x_2}=\frac{1}{9}\;|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_2}\right)=\ln\left(\frac{1}{9}\right)\Leftrightarrow x_2=-\ln(9)$$

Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution.

A7	Ausführliche Lösung
b)	$8-6e^{-\frac{1}{4}x}-2e^{\frac{1}{4}x}=0 \mid \cdot e^{\frac{1}{4}x}$ $\Leftrightarrow 8e^{\frac{1}{4}x}-6-2e^{2\cdot\frac{1}{4}x}=0 \mid :(-2)$ $\Leftrightarrow e^{2\cdot\frac{1}{4}x}-4e^{\frac{1}{4}x}+3=0$ Substitution: $e^{\frac{1}{4}x}=u \Leftrightarrow e^{2\cdot\frac{1}{4}x}=u^2$ $\Leftrightarrow u^2-4u+3=0$ $\Rightarrow p=-4\,;q=3$ $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=(-2)^2-3$ $=4-3=1$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{1}=1$ $u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\Big\vert$ $u_1=2+1=3$; $u_2=2-1=1$ $u_1=3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4}x_1}=3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}x_1=\ln(3) \Leftrightarrow x_1=4\ln(3)$ $u_2=1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4}\cdot x_2}=1 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \frac{1}{4}x_2=\ln(1) \Leftrightarrow x_2=0$ Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution.

A7	Ausführliche Lösung
c)	$\frac{1}{4}e^x-4e^{-x}-\frac{3}{2}=0 \mid \cdot 4e^x$ $\Leftrightarrow e^{2x}-16-6e^x=0$ Substitution: $e^x=u \Leftrightarrow e^{2\cdot x}=u^2$ $\Leftrightarrow u^2-6u-16=0$ $\Rightarrow p=-6\,;q=-16$ $D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=(-3)^2+16$ $=9+16=25$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{25}=5$ $u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\Big\vert$ $u_1=3+5=8$; $u_2=3-5=-2$ $u_1=8 \Leftrightarrow e^x=8 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(e^x)=\ln(8) \Leftrightarrow x=\ln(8)$ $u_2=-2 \Leftrightarrow e^x=-2$ keine Lösung Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution.

A7 Ausführliche Lösung

d)

$$e^x + e^{-x} - \frac{5}{2} = 0 \,|\cdot e^x$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} + 1 - \frac{5}{2}e^x = 0$$
Substitution: $e^x = u \Leftrightarrow e^{2\cdot x} = u^2$
$$\Leftrightarrow u^2 - \frac{5}{2}u + 1 = 0$$
$$\Rightarrow p = -\frac{5}{2};\ q = 1$$
$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 1$$
$$= \frac{25}{16} - \frac{16}{16} = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$$
$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\; \begin{aligned} u_1 &= \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2 \\ u_2 &= \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$
$$u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x_1} = 2 \,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_1}\right) = \ln(2) \Leftrightarrow x_1 = \ln(2)$$
$$u_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{x_2} = \frac{1}{2} \,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_2 = -\ln(2)$$

Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution.

A7 Ausführliche Lösung

e)

$$-3e^{-2x} + 20 - 4e^{-x} = 0 \,|\cdot e^{2\cdot x}$$
$$\Leftrightarrow -3 + 20e^{2x} - 4e^x = 0 \,|: 20$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} - \frac{1}{5}e^x - \frac{3}{20} = 0$$
Substitution: $e^x = u \Leftrightarrow e^{2\cdot x} = u^2$
$$\Leftrightarrow u^2 - \frac{1}{5}u - \frac{3}{20} = 0$$
$$\Rightarrow p = -\frac{1}{5};\ q = -\frac{3}{20}$$
$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{20}$$
$$= \frac{1}{100} + \frac{15}{100} = \frac{16}{100}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{4}{10}$$
$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\; \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{1}{2} \\ u_2 &= \frac{1}{10} - \frac{4}{10} = -\frac{3}{10} \end{aligned}\right.$$
$$u_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \,|\ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\ln(2)$$
$$u_2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x = -\frac{3}{10} \text{ keine Lösung}$$

Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution.

A7 Ausführliche Lösung

f)

$$\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{15}{2}e^{x}+\frac{27}{8}=0\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-5e^{x}+\frac{9}{4}=0$$

Substitution: $e^{x}=u \Leftrightarrow e^{2\cdot x}=u^{2}$

$$\Leftrightarrow u^{2}-5u+\frac{9}{4}=0$$

$$\Rightarrow p=-5\,;\,q=\frac{9}{4}$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^{2}-q=\left(-\frac{5}{2}\right)^{2}-\frac{9}{4}$$

$$=\frac{25}{4}-\frac{9}{4}=\frac{16}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{16}{4}}=\frac{4}{2}=2$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad u_1=\frac{5}{2}+\frac{4}{2}=\frac{9}{2} \quad u_2=\frac{5}{2}-\frac{4}{2}=\frac{1}{2}$$

$$u_1=\frac{9}{2}\Leftrightarrow e^{x_1}=\frac{9}{2}\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_1}\right)=\ln\left(\frac{9}{2}\right)\Leftrightarrow x_1=\ln\left(\frac{9}{2}\right)$$

$$u_2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{x_2}=\frac{1}{2}\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x_2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x_2=-\ln(2)$$

Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution.

A 8 **Aufgabe**

Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen

a) $2e^{-x}-3e^{x}=0$	b) $\left(e^{2x+1}-1\right)\left(e+1\right)=0$
c) $4e^{x}+2x\cdot e^{x}=0$	d) $\left(e^{x+1}-2\right)\left(e^{2x}-4\right)=0$

A8 Ausführliche Lösungen

a)

$$2e^{-x}-3e^{x}=0\,|\cdot e^{x}$$

$$\Leftrightarrow 2-3e^{2x}=0\,|-2$$

$$\Leftrightarrow -3e^{2x}=-2\,|:(-3)$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}=\frac{2}{3}\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x=\ln\left(\frac{2}{3}\right)|:2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Lösung durch logarithmieren

b)

$$\left(e^{2x+1}-1\right)\left(e+1\right)=0$$

wegen $e+1\neq 0$

$$\Rightarrow e^{2x+1}-1=0\,|+1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+1}=1\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x+1}\right)=\ln(1)$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=0\,|-1$$

$$\Leftrightarrow 2x=-1\,|:2$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Lösung durch logarithmieren

A8	Ausführliche Lösungen			
	c)	$4e^x + 2x \cdot e^x = 0$ e^x ausklammern $\Rightarrow (4+2x)e^x = 0$ wegen $e^x \neq 0$ $\Rightarrow 4+2x = 0 \mid -4$ $\Leftrightarrow 2x = -4 \mid :2$ $\Leftrightarrow x = -2$	d)	$\left(e^{x+1}-2\right)\left(e^{2x}-4\right) = 0$ Nullprodukt $\Rightarrow e^{x+1} - 2 = 0 \mid +2$ $\Leftrightarrow e^{x+1} = 2 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow x+1 = \ln(2) \mid -1 \Leftrightarrow x_1 = \ln(2) - 1$ $e^{2x} - 4 = 0 \mid +4$ $\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(4) \mid :2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}\ln(4)$