Lösungen Bruchungleichungen I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse:	
	a)	$\frac{3}{x+4} < 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-4\} \qquad L = \{x \mid x < -4\}_D$
	b)	$\frac{1}{2x} > \frac{1}{3x} - 2 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* \qquad L = \left\{x \mid x < -\frac{1}{12} \text{ oder } x > 0\right\}_D$
	c)	$\frac{3-x}{x-2} > \frac{x+4}{2(x-2)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\} \qquad L = \left\{x \mid \frac{2}{3} < x < 2\right\}_D$

E2	Ergebnisse:	
	a)	$4 - \frac{3+2x}{1-x} \geq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad L = \left\{x \mid x \leq \frac{1}{6} \text{ oder } x > 1\right\}_D$
	b)	$\frac{x-2}{x-5} \geq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{5\} \qquad L = \{x \mid x \leq 2 \text{ oder } x > 5\}_D$
	c)	$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \qquad L = \{x \mid x < -1 \text{ oder } x > 0\}_D$

E3	Ergebnisse:	
	a)	$\frac{x}{x-1} < 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad L = \{x \mid x < 1\}_D$
	b)	$\frac{3-2x}{5x+2} \leq 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5}\right\} \qquad L = \left\{x \mid x < -\frac{2}{5} \text{ oder } x \geq \frac{1}{7}\right\}_D$
	c)	$\frac{x-2}{x^2} \geq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; wegen $x^2 \geq 0 : L = \{x \mid x \geq 2\}_D$

E4	Ergebnis:
	$\frac{2+n}{5-n} > 4$ für $n \in \left]3{,}6 ; 5\right[$ also $n = 4$

E5	Ergebnis:
	$x_1 = 0 ; x_2 = \frac{4u+1}{u} = 4 + \frac{1}{u} > 4$ für $u > 0$

E6	Ergebnis:
	Für $u > 0$ gilt: $\frac{-1-8u}{-2u} = 4 + \frac{1}{2u} > 4$

Ausführliche Lösungen:

Ungleichungen werden ähnlich wie Gleichungen durch Äquivalenzumformungen gelöst. Zu beachten dabei ist jedoch, dass bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl, bzw. bei der Division durch eine negative Zahl das Relationszeichen umgekehrt werden muss.
Wird eine Bruchgleichung mit einer Variablen multipliziert, bzw. durch sie dividiert, ist eine Fallunterscheidung zu machen. Fall I, der Wert der Variablen ist positiv, Fall II, der Wert der Variablen ist negativ.

Beispiel :

$-x+2>1 \mid -2 \Leftrightarrow -x>-1 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow x<1$

$\frac{1}{x}<4 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Fall I: $x>0$	Fall II: $x<0$	
$\frac{1}{x}<4 \mid \cdot x \Leftrightarrow 1<4x \mid :4$	$\frac{1}{x}<4 \mid \cdot x \Leftrightarrow 1>4x \mid :4$	
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}<x \Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$	$\Leftrightarrow \frac{1}{4}>x \Leftrightarrow x<\frac{1}{4}$	$\Rightarrow L=\left\{x \mid x<0 \text{ oder } x>\frac{1}{4}\right\}$
Aus den Bedingungen	Aus den Bedingungen	
$x>0$ und $x>\frac{1}{4} \Rightarrow x>\frac{1}{4}$	$x<0$ und $x<\frac{1}{4} \Rightarrow x<0$	

A1	Ausführliche Lösung	
a)	$\frac{3}{x+4}<0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$	
	Fall I $x>-4 \Rightarrow$ Nenner positiv	Fall II $x<-4 \Rightarrow$ Nenner negativ
	$\frac{3}{x+4}<0 \mid \cdot(x+4)$	$\frac{3}{x+4}<0 \mid \cdot(x+4)$
	$\Leftrightarrow 3<0$ Widerspruch!	$\Leftrightarrow 3>0$
	$\Rightarrow x>-4 \not\subset L$	$\Rightarrow x<-4 \subset L$
	$\Rightarrow L=\{x \mid x<-4\}_D$	

A1 Ausführliche Lösung

b) $\frac{1}{2x} > \frac{1}{3x} - 2 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Fall I $x > 0 \Rightarrow$ Nenner positiv

$$\frac{1}{2x} > \frac{1}{3x} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2x} > \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3x} - \frac{2 \cdot 6x}{6x} \;|\cdot 6x$$

$$\Leftrightarrow 3 > 2 - 12x \;|+12x$$

$$\Leftrightarrow 12x + 3 > 2 \;|-3$$

$$\Leftrightarrow 12x > -1 \;|:12 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{12}$$

$$x > 0 \wedge x > -\frac{1}{12} \Rightarrow x > 0$$

Fall II $x < 0 \Rightarrow$ Nenner negativ

$$\frac{1}{2x} > \frac{1}{3x} - 2$$

$$\frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2x} > \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3x} - \frac{2 \cdot 6x}{6x} \;|\cdot 6x$$

$$\Leftrightarrow 3 < 2 - 12x \;|+12x$$

$$\Leftrightarrow 12x + 3 < 2 \;|-3$$

$$\Leftrightarrow 12x < -1 \;|:12 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{12}$$

$$x < 0 \wedge x < -\frac{1}{12} \Rightarrow x < -\frac{1}{12}$$

$$L = \left\{ x \mid x < -\frac{1}{12} \text{ oder } x > 0 \right\}$$

A1 Ausführliche Lösung

c) $\frac{3-x}{x-2} > \frac{x+4}{2(x-2)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ Hauptnenner: $2(x-2) \Rightarrow \frac{2(3-x)}{2(x-2)} > \frac{x+4}{2(x-2)}$

Fall I $x > 2 \Rightarrow$ Nenner ist positiv

$$\frac{6-2x}{2(x-2)} > \frac{x+4}{2(x-2)} \;|\cdot 2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2x > x + 4 \;|-x$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3x > 4 \;|-6$$

$$\Leftrightarrow -3x > -2 \;|:(-3)$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$$

$$x > 2 \text{ und } x < \frac{2}{3} \Rightarrow x \not\subset L$$

Fall II $x < 2 \Rightarrow$ Nenner ist negativ

$$\frac{6-2x}{2(x-2)} > \frac{x+4}{2(x-2)} \;|\cdot 2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2x < x + 4 \;|-x$$

$$\Leftrightarrow 6 - 3x < 4 \;|-6$$

$$\Leftrightarrow -3x < -2 \;|:(-3)$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$$

$$x < 2 \text{ und } x > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < x < 2$$

$$L = \left\{ x \mid \frac{2}{3} < x < 2 \right\}_D$$

A2	Ausführliche Lösung
a)	$4-\frac{3+2x}{1-x}\ge 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
	$\frac{4(1-x)}{1-x}-\frac{3+2x}{1-x}\ge 0 \mid +\frac{3+2x}{1-x} \Leftrightarrow \frac{4-4x}{1-x}\ge\frac{3+2x}{1-x}$
	Fall I $x>1 \Rightarrow$ Nenner ist negativ $\frac{4-4x}{1-x}\ge\frac{3+2x}{1-x} \mid \cdot(1-x)$ $\Leftrightarrow 4-4x\le 3+2x \mid -2x$ $\Leftrightarrow 4-6x\le 3 \mid -4 \Leftrightarrow -6x\le -1 \mid :(-6)$ $\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{6}$ $x>1$ und $x\ge\frac{1}{6}\Rightarrow x>1$
	Fall II $x<1 \Rightarrow$ Nenner ist positiv $\frac{4-4x}{1-x}\ge\frac{3+2x}{1-x} \mid \cdot(1-x)$ $\Leftrightarrow 4-4x\ge 3+2x \mid -2x$ $\Leftrightarrow 4-6x\ge 3 \mid -4 \Leftrightarrow -6x\ge -1 \mid :(-6)$ $\Leftrightarrow x\le\frac{1}{6}$ $x<1$ und $x\le\frac{1}{6}\Rightarrow x\le\frac{1}{6}$
	$L=\left\{x \mid x\le\frac{1}{6} \text{ oder } x>1\right\}_D$

A2	Ausführliche Lösung
b)	$\frac{x-2}{x-5}\ge 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$
	Fall I $x>5 \Rightarrow$ Nenner ist positiv $\frac{x-2}{x-5}\ge 0 \mid \cdot(x-5) \Leftrightarrow x-2\ge 0 \mid +2$ $\Leftrightarrow x\ge 2$ $x>5$ und $x\ge 2\Rightarrow x>5$
	Fall II $x<5 \Rightarrow$ Nenner ist negativ $\frac{x-2}{x-5}\le 0 \mid \cdot(x-5) \Leftrightarrow x-2\le 0 \mid +2$ $\Leftrightarrow x\le 2$ $x<5$ und $x\le 2\Rightarrow x\le 2$
	$L=\{x \mid x\le 2 \text{ oder } x>5\}_D$

A2	Ausführliche Lösung	
	c)	$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\le 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\le 0 \mid +\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}\le\frac{1}{x}$ Fall I $x<-1 \Rightarrow$ beide Nenner sind negativ $\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{x} \mid \cdot x \Rightarrow \frac{x}{x+1}\ge 1 \mid \cdot(x+1) \Leftrightarrow x\le x+1 \mid -x \Leftrightarrow 0\le 1$ ist wahr $\Rightarrow x<-1\subset L$ Fall II $-1<x<0 \Rightarrow x+1>0$ und $x<0$ $\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{x} \mid \cdot x \Rightarrow \frac{x}{x+1}\ge 1 \mid \cdot(x+1) \Leftrightarrow x\ge x+1 \mid -x \Leftrightarrow 0\ge 1$ ist falsch $\Rightarrow -1<x<0\not\subset L$ Fall III $x>0 \Rightarrow x+1>0$ und $x>0$ $\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{x} \mid \cdot x \Rightarrow \frac{x}{x+1}\le 1 \mid \cdot(x+1) \Leftrightarrow x\le x+1 \mid -x \Leftrightarrow 0\le 1$ ist wahr $\Rightarrow x>0\subset L$ $\underline{\underline{L=\{x \mid x<-1 \text{ oder } x>0\}_D}}$

A3	Ausführliche Lösung	
	a)	$\frac{x}{x-1}<1 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ Fall I $x>1 \Rightarrow x-1>0$ $\frac{x}{x-1}<1 \mid \cdot(x-1) \Leftrightarrow x<x-1 \mid -x$ $\Leftrightarrow 0<-1$ falsch $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{x \mid x<1\}_D}}$ Fall II $x<1 \Rightarrow x-1<0$ $\frac{x}{x-1}<1 \mid \cdot(x-1) \Leftrightarrow x>x-1 \mid -x$ $\Leftrightarrow 0>-1$ wahr

A3 Ausführliche Lösung

b) $\frac{3-2x}{5x+2} \le 1 \qquad 5x+2=0\,|-2 \Leftrightarrow 5x=-2\,|\,5 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{5} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{5}\right\}$

Fall I $x>-\frac{2}{5} \Rightarrow 5x+2>0$	Fall II $x<-\frac{2}{5} \Rightarrow 5x+2<0$
$\frac{3-2x}{5x+2} \le 1\,|\cdot(5x+2)$	$\frac{3-2x}{5x+2} \le 1\,|\cdot(5x+2)$
$\Leftrightarrow 3-2x \le 5x+2\,|-5x$	$\Leftrightarrow 3-2x \ge 5x+2\,|-5x$
$\Leftrightarrow -7x+3 \le 2\,|-3$	$\Leftrightarrow -7x+3 \ge 2\,|-3$
$\Leftrightarrow -7x \le -1\,|:(-7) \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{7}$	$\Leftrightarrow -7x \ge -1\,|:(-7) \Leftrightarrow x \le \frac{1}{7}$
$x>-\frac{2}{5}$ und $x \ge \frac{1}{7} \Rightarrow x \ge \frac{1}{7}$	$x<-\frac{2}{5}$ und $x \le \frac{1}{7} \Rightarrow x<-\frac{2}{5}$

$\Rightarrow L=\left\{x\,|\,x<-\frac{2}{5} \text{ oder } x \ge \frac{1}{7}\right\}_D$

A3 Ausführliche Lösung

c) $\frac{x-2}{x^2} \ge 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Für $x<0$ und für $x>0$ ist $x^2>0$, deshalb ist keine Fallunterscheidung nötig.

$\frac{x-2}{x^2} \ge 0\,|\cdot x^2 \Leftrightarrow x-2 \ge 0\,|+2 \Leftrightarrow x \ge 2 \Rightarrow L=\{x\,|\,x \ge 2\}$

A4 Ausführliche Lösung

Die natürliche Zahl sei $n \in \mathbb{N}$, der Bruch lautet $\frac{2}{5}$

Die Zahl n wird zum Zähler Addiert und vom Nenner subtrahiert.

$\Rightarrow \frac{2+n}{5-n} \Rightarrow D=\mathbb{N}\setminus\{5\}$ Der Wert des Bruches soll >4 sein.

Fall I $n>5 \Rightarrow 5-n<0$	Fall II $n<5 \Rightarrow 5-n>0$
$\frac{2+n}{5-n}>4\,|\cdot(5-n)$	$\frac{2+n}{5-n}>4\,|\cdot(5-n)$
$\Leftrightarrow 2+n<20-4n\,|+4n$	$\Leftrightarrow 2+n>20-4n\,|+4n$
$\Leftrightarrow 5n+2<20\,|-2 \Leftrightarrow 5n<18\,|:5$	$\Leftrightarrow 5n+2>20\,|-2 \Leftrightarrow 5n>18\,|:5$
$\Leftrightarrow n<\frac{18}{5} \Leftrightarrow n<3{,}6$	$\Leftrightarrow n>\frac{18}{5} \Leftrightarrow n>3{,}6$
$n>5$ und $n<3{,}6 \Rightarrow$ keine Lösung	$n<5$ und $n>3{,}6 \Rightarrow n=4$

Da die gesuchte Zahl eine natürliche Zahl sein soll und die Lösung zwischen 3,6 und 5 liegt, kommt nur die natürliche Zahl n = 4 als Lösung in Frage.

A5	Ausführliche Lösung
	Zu zeigen ist: $ux^3-(4u+1)x^2=0$ und $u>0 \Rightarrow L \not\subset \left\{x \mid \frac{1}{2} \le x \le 2\right\}$ $ux^3-(4u+1)x^2=0 \Leftrightarrow x^2(ux-4u-1)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$ (Nullprodukt) $ux-4u-1=0 \mid +4u \Leftrightarrow ux-1=4u \mid +1 \Leftrightarrow ux=4u+1 \mid :u$ $\Leftrightarrow x=\frac{4u+1}{u} \Leftrightarrow x_3=4+\frac{1}{u}$ für $u \ne 0$ Da $u>0$ sein soll, gilt $x_3=4+\frac{1}{u}>4$ Damit liegen $x_{1/2}=0$ und $x_3>4$ nicht im Intervall $\left[\frac{1}{2};2\right]$

A6	Ausführliche Lösung
	Zu zeigen ist: Für $u>0$ gilt: $\frac{-1-8u}{-2u}>4$ $\frac{-1-8u}{-2u}>4 \Leftrightarrow \frac{\cancel{(-1)}\cdot(1+8u)}{\cancel{(-1)}\cdot 2u}>4 \Leftrightarrow \frac{1+8u}{2u}>4 \mid \cdot 2u$ $\Leftrightarrow 1+8u>8u \mid -8u \Leftrightarrow 1>0$ ist wahr Damit stimmt obige Behauptung, was zu zeigen war. oder: $\frac{-1-8u}{-2u}>4 \Leftrightarrow \frac{1}{2u}+4>4 \Leftrightarrow 4+\frac{1}{2u}>4$