Lösungen Bruchgleichungen I

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\frac{2}{x}+3=\frac{5}{2} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,0\,\} \qquad L=\{\,-4\,\}$
	b)	$\frac{2}{3x-4}-\frac{1}{20}=\frac{5}{6x-8} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\,\frac{4}{3}\,\right\} \qquad L=\{\,-2\,\}$
	c)	$\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{1}{x-1} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,-1\,;1\,\} \qquad L=\left\{\,\frac{5}{3}\,\right\}$
	d)	$\frac{2+x}{x-1}=\frac{3+2x}{x+1}-1 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,-1\,;1\,\} \qquad L=\{\,-2\,\}$
	e)	$\frac{x^2+4x+3}{x+3}=x-2 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,-3\,\} \qquad L=\{\ \}$
	f)	$\frac{-3x+6}{2x-4}+\frac{x}{x-2}=-\frac{7}{6} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\} \qquad L=\{\,-1\,\}$
	g)	$\frac{4}{x-1}+\frac{1}{5}=\frac{3}{1-x}+\frac{8}{5} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,1\,\} \qquad L=\{\,6\,\}$
	h)	$x+\frac{2x}{x-1}=0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,1\,\} \qquad L=\{\,-1;\,0\}$
	i)	$\frac{32}{8x+16}=\frac{5x}{2x+4} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,-2\,\} \qquad L=\left\{\frac{8}{5}\right\}$

E2	Ergebnisse	
	a)	$\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{1-2x}{1-x^2} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,-1;1\,\} \qquad L=D$
	b)	$\frac{5x-5}{x+1}+2=\frac{6x-3}{2x-1}+4 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\,-1;\,\frac{1}{2}\right\} \qquad L=\{\ \}$
	c)	$\frac{x}{x-2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2x-4} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,2\,\} \qquad L=\{\,1\,\}$
	d)	$\frac{3-x}{x+1}-4=0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,-1\} \qquad L=\left\{\,-\frac{1}{5}\,\right\}$
	e)	$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}=0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,0\,;2\} \qquad L=\left\{\,\frac{2}{3}\,\right\}$
	f)	$3u^2+6u=\frac{4}{3}+\frac{8}{3u} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^* \qquad L=\left\{\,\pm\frac{2}{3};-2\,\right\}$

E3	Ergebnis:
	Die Behauptung ist falsch; wahre Aussage für alle $x\in\mathbb{R}\setminus\{\,3\,\}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$2x+(4-2u)\dfrac{u+3}{u-1}=-2u+6 \Rightarrow x=\dfrac{5u-9}{u-1}$ für $u\neq 1$
	b)	$ux+(u+3)\dfrac{u}{u-3}=-u \Rightarrow x=-\dfrac{2u}{u-3}$ für $u\neq 3$

E5	Ergebnis:
	$\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{1}{a}+1 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\,0\,;-1\,\}$ Umformung ergibt:
	$a^2+a+1=0 \Rightarrow$ keine Lösung wegen Diskriminante $D<0$

E6	Ergebnis:
	Umformung ergibt: $3y+2x=40 \wedge -2y+3x=16 \quad \Rightarrow L=\left\{\dfrac{128}{13}\,;\dfrac{88}{13}\right\}$

E7	Ergebnis:
	Der kleine LKW allein braucht 45 Fahrten und hat eine Ladekapazität von 9 m^3. Der große LKW allein braucht 36 Fahrten und hat eine Ladekapazität von 11,25 m^3.

E8	Ergebnis:
	Die natürliche Zahl lautet n = 12.

E9	Ergebnisse	
	a)	$D=\mathbb{R}\setminus\{\,\pm 3\,\}\,;\, x=-\dfrac{13}{3}\,(x=3\notin D)$
	b)	$x=-1$ einsetzen ergibt für die rechte Seite -1

Ausführliche Lösungen:

Bemerkung zur Definitionsmenge:
Die Definitionsmenge enthält alle Werte der Variablen x, für die die Gleichung gültig ist. Da der Nenner eines Bruches nie Null werden darf, ist zur Bestimmung der Definitionsmenge zu untersuchen, für welche Werte der Variablen x der Nenner Null wird.

Beispiele für die Definitionsmenge von Bruchgleichungen:

Beispiel 1:

$$\frac{2}{x}+7=3 \Rightarrow \text{Definitionsmenge}: D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Die Bruchgleichung ist gültig für alle Werte der Variablen x, außer der Null.

Beispiel 2:

$$\frac{3}{x-7}=2 \Rightarrow \text{Definitionsmenge}: D=\mathbb{R}\setminus\{7\} \text{ denn } x-7=0 \Leftrightarrow x=7$$

Die Bruchgleichung ist gültig für alle Werte der Variablen x, außer der 7.
Denn für x = 7 wird der Nenner Null.

Beispiel 3:

$$\frac{4}{x+2}+\frac{3}{5x-4}=1 \Rightarrow \text{Definitionsmenge}: D=\mathbb{R}\setminus\left\{-2;\frac{4}{5}\right\}$$

$$\text{denn } x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ und } 5x-4=0 \mid +4 \Leftrightarrow 5x=4 \mid :5 \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$$

Im 1. Bruch wird der Nenner für x = -2 Null.
Im 2. Bruch wird der Nenner für x = 4/5 Null.

Der Trick mit der Multiplikation über Kreuz:

$$\frac{4}{x+2}=\frac{3}{5x-4} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{-2;\frac{4}{5}\right\}$$

$$\frac{4}{x+2}=\frac{3}{5x-4} \mid \text{Multiplikation über Kreuz} \Leftrightarrow 4(5x-4)=3(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 20x-16=3x+6 \mid -3x+16 \Leftrightarrow 17x=22 \mid 17 \Leftrightarrow x=\frac{22}{17} \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{\frac{22}{17}\right\}}}$$

A1	**Aufgabe**					
	Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie die Gleichungen.					
	a)	$\frac{2}{x}+3=\frac{5}{2}$	b)	$\frac{2}{3x-4}-\frac{1}{20}=\frac{5}{6x-8}$	c)	$\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{1}{x-1}$
	d)	$\frac{2+x}{x-1}=\frac{3+2x}{x+1}-1$	e)	$\frac{x^2+4x+3}{x+3}=x-2$	f)	$\frac{-3x+6}{2x-4}+\frac{x}{x-2}=-\frac{7}{6}$
	g)	$\frac{4}{x-1}+\frac{1}{5}=\frac{3}{1-x}+\frac{8}{5}$	h)	$x+\frac{2x}{x-1}=0$	i)	$\frac{32}{8x+16}=\frac{5x}{2x+4}$

A1 Ausführliche Lösung

a)

$$\frac{2}{x}+3=\frac{5}{2}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\frac{2}{x}+3=\frac{5}{2}\,|-3\Leftrightarrow=\frac{5}{2}-\frac{6}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{x}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\cdot 2=-x\Leftrightarrow x=-4$$

da $x\in D\Rightarrow L=\{-4\}$

A1 Ausführliche Lösung

b)

$$\frac{2}{3x-4}-\frac{1}{20}=\frac{5}{6x-8}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$$

denn $3x-4=0\Leftrightarrow 3x=4\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ und $6x-8=0\Leftrightarrow 6x=8\Leftrightarrow x=\frac{8}{6}\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

Trick: Aus dem Nenner des 3. Bruchs die 2 ausklammern

$$\frac{2}{3x-4}-\frac{1}{20}=\frac{5}{2(3x-4)}\,|\cdot 2\Leftrightarrow\frac{4}{3x-4}-\frac{1}{10}=\frac{5}{3x-4}\,|+\frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{3x-4}=\frac{5}{3x-4}+\frac{1}{10}\,|-\frac{5}{3x-4}\Leftrightarrow\frac{4}{3x-4}-\frac{5}{3x-4}=\frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{3x-4}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow-1\cdot 10=1\cdot(3x-4)\Leftrightarrow-10=3x-4\,|+4$$

$\Leftrightarrow -6=3x\,|:3\Leftrightarrow x=-2$ da $x\in D\Rightarrow L=\{-2\}$

A1 Ausführliche Lösung

c)

$$\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{1}{x-1}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$$

Hauptnenner: $(x-1)(x+1)=x^2-1$ (dritte binomische Formel)

$$\frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{1(x+1)}{(x-1)(x+1)}\,|\cdot(x-1)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)-4(x-1)=x+1\Leftrightarrow 2x+2-4x+4=x+1$$

$$\Leftrightarrow -2x+6=x+1\,|-x\Leftrightarrow -3x+6=1\,|-6$$

$\Leftrightarrow -3x=-5\,|:(-3)\Leftrightarrow x=\frac{-5}{-3}\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$ da $x\in D\Rightarrow L=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

A1	Ausführliche Lösung
d)	$\frac{2+x}{x-1}=\frac{3+2x}{x+1}-1 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ Hauptnenner: $(x-1)(x+1)=x^2-1$ (dritte binomische Formel) $\frac{(2+x)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(3+2x)(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{1\cdot(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \mid (x-1)(x+1)$ $\Leftrightarrow (2+x)(x+1)=(3+2x)(x-1)-(x-1)(x+1)$ $\Leftrightarrow 2x+2+x^2+x=3x-3+2x^2-2x-\left(x^2-1\right)$ $\Leftrightarrow x^2+3x+2=2x^2+x-3-x^2+1 \Leftrightarrow x^2+3x+2=x^2+x-2 \mid -x^2$ $\Leftrightarrow 3x+2=x-2 \mid -2 \Leftrightarrow 3x=x-4 \mid -x$ $\Leftrightarrow 2x=-4 \mid :2 \Leftrightarrow x=-2$ da $x\in D \Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2\}}}$

A1	Ausführliche Lösung
e)	$\frac{x^2+4x+3}{x+3}=x-2 \quad \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ Hauptnenner: $x+3$ $\frac{x^2+4x+3}{x+3}=\frac{(x-2)(x+3)}{x+3} \mid \cdot(x+3)$ $\Leftrightarrow x^2+4x+3=x^2+3x-2x-6 \Leftrightarrow x^2+4x+3=x^2+x-6 \mid -x^2$ $\Leftrightarrow 4x+3=x-6 \mid -x \Leftrightarrow 3x+3=-6 \mid -3$ $\Leftrightarrow 3x=-9 \mid :3 \Leftrightarrow x=-3$ da $x\notin D \Rightarrow \underline{\underline{L=\{\ \}}}$

A1	Ausführliche Lösung
f)	$\frac{-3x+6}{2x-4}+\frac{x}{x-2}=-\frac{7}{6} \quad \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ Hauptnenner: $2x-4=2(x-2)$ $\frac{-3x+6}{2(x-2)}+\frac{2\cdot x}{2\cdot(x-2)}=-\frac{7}{6} \mid \cdot 2(x-2)$ $\Leftrightarrow -3x+6+2x=-\frac{7\cdot 2(x-2)}{6} \Leftrightarrow -x+6=-\frac{7x-14}{3} \mid \cdot(-3)$ $\Leftrightarrow 3x-18=7x-14 \mid -7x \Leftrightarrow -4x-18=-14 \mid +18$ $\Leftrightarrow -4x=4 \mid :(-4) \Leftrightarrow x=-1$ da $x\in D \Rightarrow \underline{\underline{L=\{-1\}}}$

A1	Ausführliche Lösung
g)	$\frac{4}{x-1}+\frac{1}{5}=\frac{3}{1-x}+\frac{8}{5} \quad \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ Trick : Für den 3. Bruch gilt $\frac{3}{1-x}=-\frac{3}{x-1}$ Aus dem Nenner wurde der Faktor (-1) ausgeklammert $\Leftrightarrow \frac{4}{x-1}+\frac{1}{5}=-\frac{3}{x-1}+\frac{8}{5}\,\vert-\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{x-1}=-\frac{3}{x-1}+\frac{7}{5}\,\vert+\frac{3}{x-1}$ $\Leftrightarrow \frac{7}{x-1}=\frac{7}{5} \Leftrightarrow 7\cdot 5=7(x-1) \Leftrightarrow 35=7x-7\,\vert+7$ $\Leftrightarrow 42=7x \Leftrightarrow 7x=42\,\vert:7 \Leftrightarrow x=6$ da $x\in D \Rightarrow \underline{\underline{L=\{6\}}}$

A1	Ausführliche Lösung
h)	$x+\frac{2x}{x-1}=0 \quad \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ Hauptnenner : $x-1$ $x+\frac{2x}{x-1}=0\,\vert\cdot(x-1) \Leftrightarrow x(x-1)+2x=0$ $\Leftrightarrow x^2-x+2x=0 \Leftrightarrow x^2+x=0$ $\Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ (Satz vom Nullprodukt) $x+1=0 \Leftrightarrow x_2=-1$ da $x_{1/2}\in D \Rightarrow \underline{\underline{L=\{-1;0\}}}$

A1	Ausführliche Lösung
i)	$\frac{32}{8x+16}=\frac{5x}{2x+4} \quad \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ Hauptnenner : $4(2x+4)$ $\Leftrightarrow \frac{32}{4(2x+4)}=\frac{4\cdot 5x}{4(2x+4)}\,\vert\cdot 4(2x+4) \Leftrightarrow 32=20x\,\vert:20$ $\Leftrightarrow \frac{32}{20}=x \Leftrightarrow x=\frac{8}{5}$ da $x\in D \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{\frac{8}{5}\right\}}}$

A2	**Aufgabe**				
	Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie die Gleichungen.				
a)	$\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{1-2x}{1-x^2}$	b)	$\frac{5x-5}{x+1}+2=\frac{6x-3}{2x-1}+4$	c)	$\frac{x}{x-2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2x-4}$
d)	$\frac{3-x}{x+1}-4=0$	e)	$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}=0$	f)	$3u^2+6u=\frac{4}{3}+\frac{8}{3u}$

A2 Ausführliche Lösung

a)

$$\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{1-2x}{1-x^2}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,1\}$$

$$\text{Trick}:\frac{1-2x}{1-x^2}=-\frac{1-2x}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

damit ist der HN: $x^2-1=(x+1)(x-1)$ 3. binomische Formel

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{(x-1)(x-1)}{\underbrace{(x+1)(x-1)}_{x^2-1}}=\frac{2x-1}{x^2-1}\mid\cdot(x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2-\underbrace{(x-1)(x-1)}_{\text{2. binomische Formel}}=2x-1\Leftrightarrow x^2-(x^2-2x+1)=2x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2-x^2+2x-1=2x-1\Leftrightarrow 2x-1=2x-1$$

Diese Gleichung wird für jedes $x\in D$ erfüllt $\Rightarrow \underline{\underline{L=D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}}}$

Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen, denn die Gleichheitsbedingung ist für jedes x der Definitionsmenge erfüllt.

A2 Ausführliche Lösung

b)

$$\frac{5x-5}{x+1}+2=\frac{6x-3}{2x-1}+4\quad\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$$

Trick: Der Zähler des 2. Bruchs ist ein Vielfaches seines Nenners
Der Faktor 3 wird ausgeklammert

$$\Leftrightarrow\frac{5x-5}{x+1}+2=\frac{3\cancel{(2x-1)}}{\cancel{2x-1}}+4\Leftrightarrow\frac{5x-5}{x+1}+2=3+4$$

$$\Leftrightarrow\frac{5x-5}{x+1}+2=7\mid-2\Leftrightarrow\frac{5x-5}{x+1}=5\mid\cdot(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 5x-5=5x+5\mid-5x\Leftrightarrow -5=5\text{ Widerspruch}\quad\Rightarrow\underline{\underline{L=\{\ \}}}$$

Tritt bei der Äquivalenzumformung ein Widerspruch auf, so hat die Gleichung keine Lösung.

A2	Ausführliche Lösung
	c) $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2x-4} \quad \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2x-4}\,\Big|+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-2}=\frac{3}{2x-4}+\frac{1}{2}\,\Big|-\frac{3}{2x-4}$ $\Leftrightarrow \frac{x}{x-2}-\frac{3}{2x-4}=\frac{1}{2}$ Hauptnenner: $2x-4$ $\Leftrightarrow \frac{2x}{2(x-2)}-\frac{3}{2x-4}=\frac{1}{2}\,\Big|\cdot 2x-4 \Leftrightarrow 2x-3=\frac{2x-4}{2}\,\Big|\cdot 2$ $\Leftrightarrow 4x-6=2x-4\,\vert-2x \Leftrightarrow 2x-6=-4\,\vert+6$ $\Leftrightarrow 2x=2\,\vert:2 \Leftrightarrow x=1$ da $x\in D \Rightarrow \underline{\underline{L=\{1\}}}$

A2	Ausführliche Lösung
	d) $\frac{3-x}{x+1}-4=0 \quad \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\frac{3-x}{x+1}-4=0\,\vert+4 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x+1}=4\,\vert\cdot x+1 \Leftrightarrow 3-x=4x+4\,\vert-4x$ $\Leftrightarrow -5x+3=4\,\vert-3 \Leftrightarrow -5x=1\,\vert:(-5)$ $\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$ da $x\in D \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\frac{1}{5}\right\}}}$

A2	Ausführliche Lösung
	e) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}=0 \quad \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ $\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}=0\,\Big|-\frac{2}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x}=-\frac{2}{x-2}\,\Big|$ Kehrwertbildung $\Leftrightarrow x=-\frac{x-2}{2}\,\Big|\cdot 2 \Leftrightarrow 2x=-(x-2) \Leftrightarrow 2x=-x+2\,\vert+x$ $\Leftrightarrow 3x=2\,\vert:3 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ da $x\in D \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{\frac{2}{3}\right\}}}$

A2 Ausführliche Lösung

f)

$$3u^2 + 6u = \frac{4}{3} + \frac{8}{3u} \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$3u^2 + 6u = \frac{4u}{3u} + \frac{8}{3u} \mid \cdot 3u \Leftrightarrow 9u^3 + 18u^2 = 4u + 8 \mid -4u$$

$$\Leftrightarrow 9u^3 + 18u - 4u = 8 \mid -8 \Leftrightarrow 9u^3 + 18u - 4u - 8 = 0$$

(Polynomgleichung 3. Grades)

1.LösungdurchprobierenmitdemHornerschema:

$$\begin{array}{c|cccc} & 9 & 18 & -4 & -8 \\ u=1 & \downarrow & 9 & 27 & 23 \\ & 9 & 27 & 23 & 15 \\ \hline & 9 & 18 & -4 & -8 \\ u=-1 & \downarrow & -9 & -9 & 13 \\ & 9 & 9 & -13 & 5 \\ \hline & 9 & 18 & -4 & -8 \\ u=-2 & \downarrow & -18 & 0 & 8 \\ & 9 & 0 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow u_1 = -2$$

Restpolynom:

$$9u^2 - 4 = 0 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow 9u^2 = 4 \mid :9$$

$$\Leftrightarrow u^2 = \frac{4}{9} \mid \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |u| = \sqrt{\frac{4}{9}} \Rightarrow u_{2/3} = \pm\frac{2}{3}$$

$$\text{da } u_{1/2/3} \in D \Rightarrow L = \left\{-2; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$$

A3 **Aufgabe**

Überprüfen Sie folgende Behauptung?

$$\frac{2x^2 + 4x - 30}{2x - 6} = x + 5 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

A3 Ausführliche Lösung

$$\frac{2x^2 + 4x - 30}{2x - 6} = x + 5 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hier geht es nicht darum die Gleichung zu lösen, sondern zu überprüfen ob die Behauptung richtig ist. Die Gleichung selber kann bekanntlich eine, mehrere, keine oder unendlich viele Lösungen besitzen. Bei Betrachtung der Definitionsmenge fällt auf, dass diese falsch ist.

$x \in \mathbb{R}$ bedutet, dass die Gleichung für jeden Wert der Variablen x definiert ist. Für $x = 3$ würde der Nenner jedoch Null, das ist nicht erlaubt, Die Definitionsmenge müsste wie folgt aussehen:

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ oder $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

A4 **Aufgabe**

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie die Gleichungen.

a) $2x + (4 - 2u)\frac{u+3}{u-1} = -2u + 6$

b) $ux + (u+3)\frac{u}{u-3} = -u$

A4	Ausführliche Lösung
a)	Die Besonderheit solcher Gleichungen besteht darin, dass sie eine Formvariable enthält. In diesem Fall u. Man kann sich u als Platzhalter für irgend eine Zahl vorstellen, die in die Gleichung eingesetzt werden kann. Die Formvariable u wird auch Parameter genannt. Die Variable, nach der die Gleichung aufzulösen ist, bleibt die Unbekannte x.

$$2x+(4-2u)\frac{u+3}{u-1}=-2u+6 \quad\Rightarrow\quad D=\mathbb{R} \text{ für } u\neq 1$$

$$2x+(4-2u)\frac{u+3}{u-1}=-2u+6 \Leftrightarrow 2x+\frac{(4-2u)(u+3)}{u-1}=-2u+6$$

Nebenrechnung:

$$(4-2u)(u+3)=4u-12-2u^2-6u \Leftrightarrow -2u^2-2u+12$$

$$\Leftrightarrow 2x+\frac{-2u^2-2u+12}{u-1}=-2u+6 \,\Big|\, -\frac{-2u^2-2u+12}{u-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x=-2u+6-\frac{-2u^2-2u+12}{u-1} \Leftrightarrow 2x=\frac{(-2u+6)(u-1)}{u-1}-\frac{-2u^2-2u+12}{u-1}$$

Nebenrechnung:

$$(-2u+6)(u-1)=-2u^2+2u+6u-6 \Leftrightarrow -2u^2+8u-6$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{-2u^2+8u-6}{u-1}-\frac{-2u^2-2u+12}{u-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{-2u^2+8u-6-(-2u^2-2u+12)}{u-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{-2u^2+8u-6+2u^2+2u-12}{u-1} \Leftrightarrow 2x=\frac{10u-18}{u-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{2(5u-9)}{u-1} \,\Big|\, :2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{5u-9}{u-1} \text{ für } u\neq 1}}$$

A4	Ausführliche Lösung
b)	

$$ux+(u+3)\frac{u}{u-3}=-u \text{ für } u\neq 3$$

$$ux+(u+3)\frac{u}{u-3}=-u \Leftrightarrow ux+\frac{u(u+3)}{u-3}=-u \,\Big|\, :u$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{u+3}{u-3}=-1 \,\Big|\, -\frac{u+3}{u-3} \Leftrightarrow x=-1-\frac{u+3}{u-3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-1(u-3)}{u-3}-\frac{u+3}{u-3} \Leftrightarrow \frac{-u+3-u-3}{u-3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2u}{u-3} \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-\frac{2u}{u-3} \text{ für } u\neq 3}}$$

A5	**Aufgabe**
	Zeigen Sie:
	$(a+1)^{-1} = a^{-1} + 1;\ a \in D$ besitzt keine Lösung.

A5	Ausführliche Lösung
	$(a+1)^{-1} = a^{-1} + 1$ Zu zeigen ist, dass die Gleichung keine Lösung hat. $(a+1)^{-1} = a^{-1} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a} + 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$ Hauptnenner : $a(a+1)$ $\Leftrightarrow \frac{1a}{a(a+1)} = \frac{1(a+1)}{a(a+1)} + \frac{1a(a+1)}{a(a+1)} \mid \cdot a(a+1)$ $\Leftrightarrow a = a+1+a^2+a \mid -a \Leftrightarrow 0 = a^2+a+1$ (quadratische Gleichung) $p=1 \quad q=1 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$ $D < 0 \Rightarrow$ Die quadratische Gleichung hat keine Lösung. Damit hat auch die Ausgangsgleichung keine Lösung. Was zu zeigen war.

A6 Aufgabe

Lösen Sie das Gleichungssystem:

$$\mathrm{I}:\ \frac{3}{x-23}=\frac{-2}{y+2} \qquad \mathrm{II}:\ \frac{x-4}{y+2}=\frac{x-2}{y+5}$$

A6 Ausführliche Lösung

$\mathrm{I}:\ \frac{3}{x-23}=\frac{-2}{y+2}$ für $x \neq 23$ und $y \neq -2$ $\qquad \mathrm{II}:\ \frac{x-4}{y+2}=\frac{x-2}{y+5}$ für $y \neq -2$ und $y \neq -5$

Damit wird die Definitionsmenge des Gleichungssystems:

$x \in \mathbb{R} \setminus \{23\}$ und $y \in \mathbb{R} \setminus \{-5;-2\}$

$$\mathrm{I}:\ \frac{3}{x-23}=\frac{-2}{y+2}$$
$$\Leftrightarrow 3(y+2)=-2(x-23)$$
$$\Leftrightarrow 3y+6=-2x+46 \mid +2x$$
$$\Leftrightarrow 2x+3y+6=46 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 2x+3y=40$$

$$\mathrm{II}:\ \frac{x-4}{y+2}=\frac{x-2}{y+5}$$
$$\Leftrightarrow (x-4)(y+5)=(x-2)(y+2)$$
$$\Leftrightarrow \cancel{xy}+5x-4y-20=\cancel{xy}+2x-2y-4 \mid -2x$$
$$\Leftrightarrow 3x-4y-20=-2y-4 \mid +2y$$
$$\Leftrightarrow 3x-2y-20=-4 \mid +20$$
$$\Leftrightarrow 3x-2y=16$$

$\mathrm{I}:\ 2x+3y=40 \qquad \mathrm{II}:\ 3x-2y=16$ Lösung mit dem Additionsverfahren

$$\begin{array}{l|rcr|l}
\mathrm{I} & 2x+3y & = & 40 & \cdot 3 \\
\mathrm{II} & 3x-2y & = & 16 & \cdot(-2) \\
\hline
\mathrm{I} & 6x+9y & = & 120 & \\
\mathrm{II} & -6x+4y & = & -32 & \mathrm{II}+\mathrm{I} \\
\hline
\mathrm{I} & 6x+9y & = & 120 & \\
\mathrm{II} & 13y & = & 88 &
\end{array}$$

$$13y=88 \mid 13 \Leftrightarrow y=\frac{88}{13}$$

$$6x+9y=120 \Leftrightarrow 6x+9\cdot\frac{88}{13}=120 \mid -\frac{792}{13}$$

$$\Leftrightarrow 6x=-\frac{792}{13}+\frac{1560}{13} \Leftrightarrow 6x=\frac{768}{13} \mid :6$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{128}{13}$$

da $x;y \in D \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{\frac{128}{13};\frac{88}{13}\right\}}}$

A7	**Aufgabe**
	Ein kleiner LKW fährt einen Aushub von 405 m^3 in x Fahrten zur Deponie. Ein großer LKW braucht dazu 9 Fahrten weniger. Zusammen schaffen beide LKW's den Aushub in je 20 Fahrten. Wie viel Fahrten braucht jeder LKW alleine und welche Ladekapazität hat jeder?

A7 Ausführliche Lösung

Der kleine LKW benötigt für 405 m^3 x Fahrten.
Der große LKW benötigt dafür 9 Fahrten weniger, also x – 9 Fahrten.

Der kleine LKW bevördert pro Fahrt $\frac{405}{x}m^3$

Der große LKW bevördert pro Fahrt $\frac{405}{x-9}m^3$

Zusammen befördern beide LKW's pro Fahrt $\frac{405}{x}m^3+\frac{405}{x-9}m^3$

Da beide LKW's in 20 Fahrten $405\,m^3$ befördern gilt:

$$20\left(\frac{405}{x}m^3+\frac{405}{x-9}m^3\right)=405m^3 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0;9\}$$

In der folgenden Rechnung wird ohne Einheiten gerechnet

$$\Leftrightarrow 20\left(\frac{405}{x}+\frac{405}{x-9}\right)=405 \Leftrightarrow 20\cdot 405\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-9}\right)=405 \mid :405$$

$$\Leftrightarrow 20\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-9}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{20}{x}+\frac{20}{x-9}=1 \text{ Hauptnenner: } x(x-9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{20(x-9)}{x(x-9)}+\frac{20x}{(x-9)x}=1\cdot\frac{x(x-9)}{x(x-9)} \mid \cdot x(x-9)$$

$$\Leftrightarrow 20x-180+20x=x^2-9x \Leftrightarrow 40x-180=x^2-9x \mid -x^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2+40x-180=-9x \mid +9x \Leftrightarrow -x^2+49x-180=0 \mid \cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2-49x+180=0 \Rightarrow p=-49 \quad q=180$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{2401}{4}-\frac{720}{4}=\frac{1681}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{1681}{4}}=\frac{41}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{49}{2}+\frac{41}{2}=\frac{90}{2}=45 \\ x_2=\frac{49}{2}-\frac{41}{2}=\frac{5}{2}=4 \end{array} \right. \Rightarrow L=\{4;45\}$$

Der kleine LKW allein benötigt 45 Fahrten.
Der große LKW allein benötigt 45 – 9 = 36 Fahrten.
Das Ladevermögen des kleinen LKW's beträgt 405 m^3 / 45 = 9 m^3
Das Ladevermögen des großen LKW's beträgt 405 m^3 / 36 = 11,25 m^3

Die Zweite Lösung der quadratischen Gleichung macht im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung keinen Sinn, denn beide LKW's zusammen machen schon 20 Fahrten.

A8	**Aufgabe**
	Welche natürliche Zahl(en) kann man zum Zähler von 2/5 addieren und gleichzeitig vom Nenner subtrahieren um –2 zu erhalten?

A8	Ausführliche Lösung
	Die natürliche Zahl sei $n \in \mathbb{N}$, der Bruch lautet $\frac{2}{5}$ Die Zahl n wird zum Zähler Addiert und vom Nenner subtrahiert. $\Rightarrow \frac{2+n}{5-n} \Rightarrow D = \mathbb{N} \setminus \{5\}$ Der Wert des Bruches soll -2 sein. $\Rightarrow \frac{2+n}{5-n} = -2 \mid \cdot (5-n) \Leftrightarrow 2+n = -10+2n \mid -2n$ $\Leftrightarrow 2-n = -10 \mid -2 \Leftrightarrow -n = -12 \mid :(-1) \Leftrightarrow \underline{\underline{n = 12}}$ Die natürliche Zahl lautet n = 12.

A9	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Gleichung $\frac{6-2x}{x^2-9} = \frac{3}{2}$	
	a)	Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.
	b)	Ersetzen Sie 3/2 durch eine andere Zahl so, dass die sonst unveränderte Gleichung die Lösung x = - 1 hat.

A9	Ausführliche Lösung	
	a)	$\frac{6-2x}{x^2-9} = \frac{3}{2}$ Nennernullstelle: $x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ $\frac{6-2x}{x^2-9} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(6-2x) = 3(x^2-9) \Leftrightarrow 12-4x = 3x^2-27 \mid -3x^2$ $\Leftrightarrow -3x^2-4x+12 = -27 \mid +27 \Leftrightarrow -3x^2-4x+39 = 0 \mid \cdot(-1)$ $\Leftrightarrow 3x^2+4x-39 = 0 \mid :3 \Leftrightarrow x^2+\frac{4}{3}x-\frac{39}{3} = 0$ $p = \frac{4}{3} \quad q = -\frac{39}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{4}{9}+\frac{117}{9} = \frac{121}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{11}{3}$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left\vert \begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{3}+\frac{11}{3} = \frac{9}{3} = 3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}-\frac{11}{3} = -\frac{13}{3} \end{array} \right.$ da $x_1 = 3 \notin D \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\frac{13}{3}\right\}}}$

A9	Ausführliche Lösung	
	b)	Ansatz: $\frac{6-2x}{x^2-9}=z \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$ Da die Lösung der Gleichung -1 sein soll, wird -1 in die Gleichung eingesetzt. $x=-1 \Rightarrow \frac{6-2(-1)}{(-1)^2-9}=z \Leftrightarrow \frac{6+2}{1-9}=z \Leftrightarrow \frac{8}{-8}=z \Leftrightarrow -1=z \Leftrightarrow \underline{\underline{z=-1}}$